TRATTATO
DI
ARITMETICA PRATICA
NEL QUALE

Oltre lo spiegarsi le Regole ordinarie della medesima, si discorre di varie proprietà, e curiosità Numeriche,

Con alcuni facilissimi metodi, per risolvere molti intricati Problemi,

AGGIUNTOVI

Un breve Trattato d' Algebra,

Con le Traduzioni di quanto hanno scritto delle Permutazioni, e Combinazioni IL P. TACQUET, ED IL SIG. NICCOLO' DI MARTINO

OPERA

DIVISA IN TRE TOMI,

E DATA IN LUCE

DA

GIUSEPPE ANTONIO ALBERTI

BOLOGNESE.

TOMO TERZO.

IN VENEZIA,
MDCCLII.

APPRESSO GIO: BATTISTA RECURTI
CON LICENZA DE' SUPERIORI, E PRIVILEGIO.

INDICE
DEI CAPITOLI.
PARTE OTTAVA.

PARTE NONA.

Traduzione del Padre Tacquet.

Traduzione dell'Opuſcolo del Sig. Niccolò di Martino.

PARTE DECIMA.

ARITMETICA PRATICA
D I
GIUSEPPE ALBERTI

PARTE OTTAVA.

UI, come avvisammo nella Prefazione del primo Tomo, trattar dovremo dei principj, od elementi Algebratici, sol tanto però, quanto bisogna, per istruire il nostro Aritmetico a sciorre molti di quei Quesiti, che coll' Aritmetica sola sviluppare non possonsi; cioè tutti quei che giunger possono col suo calcolo a quelle equazioni che dagli Algebristi quadratiche semplici vengono nomate. Se poi più oltre avanzarsi desidera, ricorrer dee a quegli Autori che di tal Scienza hanno pienamente trattato, mentre pel nostro Aritmetico penso sieno sufficienti i seguenti pochi documenti con l'applicazione di essi, àlla pratica nelle soluzioni di alcuni non tanto ovvii Quesiti, che ad esso occorrer potessero.

CAPITOLO PRIMO.

Dell' Algebra, e dei segni che s' adoprano in essa.

DIFFINIZIONI.

ALGEBRA chiamata ancora *Analisi*, o *Logistica speciosa*, che ancora da certuni vien detta *Mattematica universale*, altro non è che il metodo di risolvere i Problemi intorno le quantità.

Ovvero l'Algebra è un'Arte, che medianti le Lettere dell'Alfabeto, ſi fanno le ſteſſe operazioni, che fanno i numeri, cioè la Sommazione, la Sottrazione, la Moltiplicazione, la Diviſione, e l'Eſtrazione delle Radici.

Le quantità notanſi con le Lettere dell'Alfabetto, e allora chiamanſi *quantità Analiſtiche*, *o Algebraiche*. Adopranſi le prime Lettere dell'Alfabetto, come a, b, c, dec. per eſprimere le quantità *cognite*, ovvero *date*, e l'ultime, come f, t, u, x, y, z ſervono ad eſprimere le quantità *incognite*, cioè quelle che ſi cercano.

S'adoprano le Lettere dell'Alfabetto per maggior facilità per eſſer queſte ad ogni uno cognite più che altri ſegni che adoprar ſi poteſſero; e per non ſignificar queſte da sè coſa alcuna, perciò a qualſivoglia quantità poſſonſi applicare, e con eſſe facilmente diſtinguonſi in qualſivoglia prodotto tutte le quantità che lo producono, e quante ve ne ſono delle incognite, e quante delle cognite. E per eſprimere le lettere qualſivoglia quantità, vedeſi come riſoluta una dimanda, o queſito la ſoluzione rieſce generale a qualunque altra ſimil dimanda, benchè di differenti dati, ed ancora infiniti che può avere, lo che è di un utile molto grande.

Per far che facilmente ſovenga alla memoria qualſivoglia quantità eſpreſſa per lettera, ſarà utile eſprimere, tanto le quantità cognite, quanto le incognite, con la prima lettera della coſa che ſignificano: come il numero per n, ſomma per ſ, tempo per t, velocità per u ec.

Fuori delle ſuddette lettere vi ſono ancora alcuni ſegni, coi quali notanſi le operazioni, che ſopra le ſteſſe lettere ſi fanno, onde queſto ſegno + ſignifica *più*, ed è il ſegno della ſomma, ſicchè $a+b$ moſtra il b, aggiunto allo ſteſſo a. Queſto ſegno — ſignifica *meno*, ed è ſegno della Sottrazione, ſicchè $a-b$, moſtra il b levato dall'a.

Queſto ſegno = ſignifica *eguale*, e indica darſi ugualità fra le quantità che eſſo ſegno precedono, e quelle che lo ſeguono. Così $a = b$, ovvero $x = 6$, ſignifica a, e b eſſere uguali, ed il valore di x eſſere uguale a 6.

Queſto $>$ ſignifica *maggiore*: così $a > b$ indica l'a eſſere maggiore dello ſteſſo b.

Queſto $<$ ſignifica *minore*: così $a < b$, indica l'a eſſere minore del b.

Queſto ∞ ſignifica *infinito*; così $x = \infty$ moſtra che l'x è una quantità infinitamente grande.

Le quantità, che hanno avanti loro il ſegno + *affirmative*, ovvero *poſitive* ſi chiamano: quelle che hanno il ſegno — *negative*, ovvero *privative* vengon dette: quelle lettere poi che nel principio non hanno alcun ſegno, ſe gli dee intendere il ſegno + avanti eſſe.

Le quantità Analitiche, le quali il segno + et — non hanno con loro, diconsi *semplici*, *monomie*, *o incomplesse*, come ab, abc, $\frac{ab}{c}$ ec. e *composte*, *complesse*, ovvero *polimonie* sono quelle composte di più quantità interposte dai segni +, ovvero —. Se constano di due, come a + b, ovvero, ab — bb chiamansi *binomie*; se di tre, come ac + m — r, *trinomie*, e così di seguito.

Le quantità complesse distinte dai segni + ovvero —, le parti distinte dai detti segni chiamansi *termini*. Così ab + bc — cd è una quantità complessa, che consta di tre termini ab, bc, cd. Osservasi di non confondere questa voce, termine, coi termini delle equazioni, come si vedrà a suo luogo.

I numeri, che precedono le quantità analitiche, come 2x, 4y, e nel trinomio aa + 2b — 4c, i numeri 2, e 4 diconsi *coefficienti*. Dove non è alcun numero sempre per il coefficiente s' intende l' unità. Così ab intendesi 1ab, et 2a — b, intendesi 2a — 1b.

Le quantità moltiplici, ovvero sumoltiplici si sogliono esprimere indeterminatamente, ed in genere per le lettere m, n, r, come mx, ny, rz; perchè m, n, r mostri un numero intiero, o rotto. In particolare, ed in ispecie si esprimono per numeri intieri, ovvero rotti, come 2x, 3z, 4y, e significano il doppio, il triplo, il quadruplo delle quantità x, z, y. Ancora $\frac{1}{2}$ a, $\frac{1}{3}$ b, $\frac{1}{4}$ c, oppure $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{3}$, $\frac{c}{4}$ significa una parte aliquota delle quantità a, b, c; cioè un mezzo a, la terza parte di b, e la quarta parte di c.

I termini delle quantità incomplesse, che contengono le stesse lettere chiamansi *simili*. Così 2abc, ed abc sono quantità incomplesse simili; e 3aab — 2aab + 4bb è una quantità complessa che ha i due termini simili 3aab et — 2aab; il terzo termine 4bb vedesi che non è simile.

Acciocchè facilmente resti chiaro nelle quantità Algebratiche la loro similitudine, bisogna sempre scrivere le prime Lettere dell'Alfabetto nel principio, cioè secondo l'ordine che tengono nell' Alfabetto, verbigrazia in cambio di scrivere bac, ovvero cba, deesi scrivere abc.

CAPITOLO II.

Ridurre le quantità Algebratiche semplici alla sua più semplice espressione.

Quando i coefficienti dei termini simili hanno uno stesso segno +, ovvero —, si sommano insieme, e avanti se gli pone lo stesso segno. Quando poi avessero segni diversi, allora il minore coefficiente si leva dal maggiore, e al residuo se gli pone avanti il segno che ha il maggiore. Sia 4ab + 3ab, ridotti sono 7ab: 6ac + 4ab — 8ab sono 6ac — 4ab: 3a — 5a sono — 2a: 3abc — abc, ovvero 3abc — 1abc sono 2abc: 3ab — 3ab = o ec.

In ogni calcolo Algebraico, prima d'ogni altra cosa devonsi ri-

durre i termini simili nel modo suddetto, che chiamasi ancora fare l'*espurgazione*.

CAPITOLO III.

Del Sommare le quantità Algebraiche semplici, e composte.

SCrivansi le date quantità una dietro l'altra, con i suoi segni che le convengono, e poi riducansi i termini simili, lo che fatto quello che resta scritto sarà la ricercata somma. Sieno da sommare le quantità $3ab - 4bc + 5cd$, colle quantità $2ab - 3cd$, scrivasi $3ab - 4bc + 5cd + 2ab - 3cd$, che riduconsi a queste $5ab - 4bc + 2cd$ per la somma ricercata. Sieno ancora da sommare $5abc - 4bcd$ con $5abd - 8abc + 6bcd$, scrivasi $5abc - 4bcd + 5abd - 8abc + 6bcd$, che resta poi ridotto così $5abd - 3abc + 2bcd$. Sia parimenti da sommare $6a + 3b$, con $2a - 3b$, scrivasi $6a + 3b + 2a - 3b$, che si riducono in $8a$ ec.

Non serve attendere l' ordine delle lettere, mentre la somma verbigrazia $2a + b$, vale lo stesso che $b + 2a$, e $10 + 5$, vale lo stesso che $5 + 10$, cioè 15.

CAPITOLO IV.

Del sottrarre le quantità Algebraiche semplici, e composte.

SCrivansi le date quantità una dietro l'altra, col mutare tutti i segni delle quantità che deonsi sottrarre, e poi riducansi i termini simili, fatta la qual riduzione quello che resta notato è il residuo, o differenza ricercata. Siano da sottrarre le quantità $3a - 2b + 3c$ dalle quantità $5a - 3b - 5c$ scrivansi così $5a - 3b - 5c - 3a + 2b - 3c$, che ridotti sono $2a - b - 8c$. Sia ancora da sottrarre $3ab - 2bc + 2cd$ da $5ab - 4bc + 2cd$ scrivansi così $5ab - 4bc + 2cd - 3ab + 2bc - 2cd$ che si riducono a questo $2ab - 2bc$ ec.

Egli è manifesto che la sottrazione delle quantità composte degenera in somma, imperocchè sottraendo da $3a + 2b$, le quantità $a + 5b$ mutati i segni di $a + 5b$ sarà $- a - 5b$. Si averà dunque $3a + 2b - a - 5b$, che ridotti alla sua più semplice espressione danno il residuo $2a - 3b$. Uno abbia scudi 100, e debba dare ad un altro scudi $100 + 50$; mutati i segni e ridotto in somma esso avrà scudi $100 - 100 - 50$, cioè $- 50$ scudi dell'altro.

CAPITOLO V.

Del Moltiplicare le quantità Algebraiche semplici e composte.

PER moltiplicare due, o più lettere insieme basta scriverle una dopo dell'altra, senza alcuna interposizione di segno, che le separi, mentre ciò fatto tale sarà il cercato prodotto. Sia da moltiplicare a per b scrivasi ab che sarà il prodotto. Sia da moltiplicare ab per ac, scrivasi aabc, che sarà il suo prodotto ec.

E perchè le quantità Algebratiche, che si deono moltiplicare, possono avere presso di se un qualche numero, cioè il coefficiente,

ed

èd ancora i segni diversi, onde allora bisognerà osservare le seguenti cose.

Si moltiplichino prima i coefficienti; dipoi le lettere, al prodotto se gli anteponga il segno $+$ se tutte e due le quantità che si moltiplicano hanno avanti sè lo stesso segno $+$ ovvero $-$, se poi una di loro avesse avanti sè il segno $+$, e l'altra il segno $-$ al prodotto se gli anteporrà il segno $-$. Così moltiplicando $3a$ per $2b$, moltiplicasi 3 per 2, che fa 6, ed a in b fa ab, dunque si avrà $6ab$ prodotto di $3a \times 2b$. Parimenti $3ab \times -2ab = -6aabb$: Questo $-3ab \times -2cd = 6abcd$: Quest'altro $5ab \times$, ed ovvero $1cd = 5abcd$: ancora $aab \times abb = aaabbb$, ovvero a^3b^3 imperocchè quando una stessa lettera più di due volte è in uno stesso prodotto, una sol volta si scrive, e alla sua destra un poco più sopra se gli scrive una figura, o numero Aritmetico, che esprimi quante volte la detta lettera dovrebbe esser scritta. Così per $aaaa$ scrivesi a^4; e per $aaa\,bbb$, scrivesi a^3b^3, similmente per aa si può scrivere a^2; e per bb, b^2 ec.

Quel numero Aritmetico, che indica quante volte dovrebbesi scrivere in un prodotto la stessa lettera, chiamasi *Esponente*. Così in a^3b^4, il 3 è l'esponente dell'a, e il 4 è l'esponente del b; in a^3b, 3 è l'esponente dell'a è l'1 è l'esponente del b; imperocchè quando qualche lettera trovasi sola, vuol dire che una sol volta deesi scrivere nello stesso prodotto, il di cui esponente supponesi l'unità, nel qual caso si tralascia di scriverlo. Così a esprime lo stesso che a^1, ovvero $1a^1$; ed a^3b esprime lo stesso che a^3b^1 ec.

La moltiplicazione delle quantità composte si esprime alcune volte per questo segno $\times$, come già dicemmo con di più una linea da una parte, e dall'altra, che giunga sopra tutto ciò che deesi moltiplicare, come questo $\overline{a+b-c} \times \overline{a-x}$. Ovvero le quantità che deonsi moltiplicare si includono fra parentesi, come fanno molti dei moderni secondo l'esempio del Leibnizio; onde l'espressione della moltiplicazione della suddetta quantità sarà $(a+b-c)\ (a-X$. E similmente $(a+b-c) \times$ mostra il prodotto $ax+bx-cx$.

Quando poi le quantità da moltiplicarsi sono composte, allora per averne il prodotto deesi moltiplicare ciascheduno dei termini di una delle due date quantità da moltiplicarsi, in ciascheduno dei termini dell'altra nello stesso modo, che si è detto di sopra, per le quantità semplici, principiando per maggior comodo dalla sinistra andando verso la destra, e per maggior intelligenza vegansi i seguenti esempj.

ESEM-

ESEMPIO I.

Moltiplicare $a + b - c$

per $a - x$

prodotto $aa + ab - ac - ax - bx + cx$

ESEMPIO II.

Moltiplicare $2a - 3bc + 1$

per $3a - 2b$

prodotto $6aa - 9abc + 3a - 4ab + 6bbc - 2b$

ESEMPIO III.

Moltiplicare $x + ax - 2b + 3$

per $x - \frac{1}{2}a + 2b$

prodotto $xx - axx - 2bx + 3x - \frac{1}{2}ax - \frac{1}{2}aax + ab - \frac{3}{2}a + 2bx + 2abx - 4bb + bb$.

Il suddetto prodotto espurgato $xx - axx + 3x - \frac{1}{2}ax - \frac{1}{2}aax + ab - \frac{3}{2}a + 2abx - 4bb + bb$.

CAPITOLO VI.

Del dividere le quantità Algebraiche, semplici, e composte.

SI scriva il divisore sotto il dividendo, in modo di frazione; e tal frazione sarà il quoziente cercato: ed ogni divisione numerica nello stesso modo fatta dà il vero quoziente: onde $\frac{12}{4} = 3$; $\frac{15}{3} = 5$, e lo stesso deesi intendere nella divisione delle quantità Algebratiche, mentre se sarà da dividere ab per c, si scriverà $\frac{ab}{c}$; e se sarà da dividere $aa + bb$, per $c + d$, si scriverà $\frac{aa+bb}{c+d}$ ec.

E' chiaro, che essendo il dividendo un prodotto provenuto dalla moltiplicazione del divisore, per qualche altra quantità, allora il quoziente è lo stesso, che il dividendo, a cui sia levato, o cancellato il divisore. Così il quoziente di ab, diviso per a, e b, cioè $\frac{ab}{a} = b$; il quoziente di abc, diviso per ab, e c, cioè $\frac{abc}{ab} = c$; similmente $\frac{a^3}{aa} = a$; ed $\frac{a^3bb}{aab} = ab$, e lo stesso si dirà degli altri.

Quando poi il dividendo e il divisore avessero avanti loro un numero, o coefficiente, allora dividasi secondo la regola della divisione dei numeri, il numero che precede il dividendo, per quello, che precede il divisore, poi dividansi le lettere del dividendo per le lettere del divisore, nel modo insegnato di sopra, e al quoziente se gli anteponga il segno $+$ se tanto il dividendo, quanto il divisore hanno lo stesso segno $+$, ovvero $-$; se poi uno abbia il segno $+$, e l'altro il segno $-$ il segno da anteporre al quoziente sarà $-$. Così il quoziente di $12ab$ diviso per $3a$, e $4b$, impe-

perocchè $\frac{12}{3} = 4$, ed $\frac{ab}{a} = b$, perciò $\frac{12ab}{3a} = 4b$: ſimilmente $\frac{12abc}{-4ac} = -3b$: ed $\frac{-15a^3bb}{3aab} = -5ab$: ed $\frac{12a^3bb}{-3ab} = 4aab$ cc.

Se il dividendo, e il diviſore ſono ſimili, e uguali, il quoziente ſarà l'unità. Così $\frac{a}{a} = 1$; ed $\frac{12ab}{12ab} = 1$, e queſto perchè ogni quantità miſura ſe ſteſſa, ovvero ſe ſteſſa contiene una volta.

Non di rado ſuccede, che i numeri ſi poſſono dividere, ma le lettere non ſi poſſono dividere, ovvero al contrario; in tal caſo diviſo ciò, che ſi può dividere, il reſto ſi laſcierà in frazione. Così $\frac{12ab}{3c} = \frac{4ab}{c}$; ed $\frac{8abc}{3ab} = \frac{8c}{3}$.

Quando poi nè i numeri, nè le lettere ſi poſſono dividere, allora ſi ſcriverà il diviſore ſotto il dividendo in modo di frazione, e tal frazione deeſi prendere per il quoziente della diviſione. Onde eſſendo da dividere a per b, ſi ſcriverà $\frac{a}{b}$; e poi 3ab per 2c dà $\frac{3ab}{2c}$; ancora $-2ab$ per 3c dà $\frac{-2ab}{3c}$, e ancora 5ab per $-2c = \frac{5ab}{-2c}$ parimente $-4ab$, diviſo per $-3c$, dà $\frac{-4ab}{-3c}$, e così deeſi intendere delle altre.

Quando il dividendo è un prodotto del diviſore in qualſivoglia altra quantità, allora ſi ha il quoziente eſattiſſimo, come nelle quantità ſemplici, ed è facile il conoſcere, quando una quantità che è da dividere per un'altra quantità, ſia il prodotto della ſteſſa quantità, che deve eſſere il diviſore per un'altra terza quantità, nel qual caſo il quoziente ſarà queſta terza quantità. Così ax - bx diviſo per a - b da il quoziente x; imperocchè ax - bx è il prodotto di $\overline{a-b} \times x$, ed ax-bx, diviſo per x da il quoziente a-b : ſimilmente $\frac{aaxx-bbxx}{aa-bb} = xx$; ed $\frac{aaxx-bbxx}{xx} = aa-bb$.

Ma perchè non è poi tanto facile di conoſcere, quando qualche quantità compoſta ſi poſſa dividere per un'altra quantità compoſta, allora è neceſſario ricorrere alla ſeguente regola di diviſione.

Acciocchè facilmente ſucceda la diviſione delle quantità compoſte, ſi eſamini nelle date due quantità, quali una per l'altra ſi divida, e chi delle lettere più frequente ritrovaſi con differenti dimenſioni; e ſi ſcriva nel primo luogo nell'una, e nell'altra quantità quel termine, dove queſta lettera ha più dimenſioni, ſcrivaſegli poi appreſſo gli altri termini, ſecondo l'ordine delle poteſtà della ſteſſa lettera, la qual *lettera dominante*, da alcuni vien chiamata.

La regola poi di fare la diviſione è queſta: Scrivaſi il diviſore a ſiniſtra del dividendo, e ſecondo la regola della diviſione delle quantità ſemplici, ſi divida il primo termine del dividendo, per il primo termine del diviſore; quello che ne riſulta, cioè il quoziente, ſcrivaſi a deſtra del dividendo. Moltiplicanſi poi tutti i termini del diviſore, per il quoziente, e il prodotto levaſi dal dividendo, cioè ſcrivendo coi ſegni inverſi ſotto lo ſteſſo dividendo, e poi ſi

si faccia la riduzione, tanto del dividendo, quanto del detto prodotto, come se fosse una sola quantità.

Dippoi dividansi per lo stesso divisore le quantità rimaste dopo fatta la riduzione, e il nuovo termine di quì provenuto si ponga nel quoziente, e si termini questa seconda operazione nello stesso modo della prima. Si ripeta tante volte la stessa operazione, quanto è necessario, finchè la riduzione resti nulla, cioè sia eguale a zero, lo che sempre succede tutte le volte, che la quantità da dividersi è il prodotto del divisore per una terza quantità, che è il quoziente della divisione. Dai seguenti esempj resterà più chiara la suddetta regola.

ESEMPIO I.

Sia $a^3 - 3aab + 3abb - b^3$ da dividere per $a - b$: scritti il dividendo e il divisore nel modo che abbiamo detto, e presa la lettera a, come la lettera dominante, così si seguirà.

Divisore	Dividendo	Quoziente
$a - b$	$a^3 - 3aab + 3abb - b^3$	$aa - 2ab + bb$
prodotto	$-a^3 + aab$	
prima riduzione	$0 - 2aab + 3abb - b^3$	
prodotto	$2aab - 2abb$	
seconda riduzione	$0 + abb - b^3$	
prodotto	$-abb + b^3$	
terza riduzione	$0 \quad 0$	

Il primo termine a^3 del dividendo; diviso per il primo a, del divisore dà il quoziente aa; moltiplicato il divisore $a+b$, nel quoziente aa, si avrà $a^3 - aab$, che si scrive coi segni inversi $-a^3 + aab$ sotto del dividendo, e fatta la riduzione si avrà la quantità $-2aab + 3abb - b^3$, che si dice prima riduzione.

Dippoi il primo termine $-2aab$ della suddetta prima riduzione diviso per il primo a, del divisore dà il quoziente $-2ab$; moltiplicato poi il divisore $a-b$, in questo nuovo termine del quoziente, cioè $-2ab$, ne proviene $-2aab + 2abb$, che scritto coi segni inversi, cioè $2aab - 2aabb$ sotto la prima riduzione si averà la seconda riduzione $abb - b^3$.

Finalmente il primo termine abb della suddetta seconda riduzione diviso pel primo termine a del divisore dà il quoziente bb, il quale moltiplicato nel divisore $a-b$ produce $abb - b^3$, che scritto coi segni inversi, cioè $-abb + b^3$ sotto la seconda riduzione si avrà zero per la terza riduzione, lo che mostra la divisione essere assoluta; onde $\frac{a^3 - 3aab + 3abb - b^3}{a-b} = aa - 2ab + bb$.

ESEM-

ESEMPIO II.

Divisore	Dividendo	Quoziente
$aa-ab+cd$	$a^4-aabb+2abcd-ccdd$	$aa+ab-cd$
prodotto	$-a^4+a^3b-aacd$	

prima riduzione — $0+a^3b-aabb-aacd+2abcd-ccdd$

prodotto —— $-a^3b+aabb \quad -abcd$

seconda riduzione — $0 \quad 0-aacd+abcd-ccdd$

podotto ——— $+aacd-abcd+ccdd$

terza riduzione ——— $0 \quad 0 \quad 0$

Dunque $\frac{a^4-aabb+2abcd-ccd}{aa-ab+cd} = aa+ab-cd$.

ESEMPIO III.

Divisore	Dividendo	Quoziente
$yy-aa-bb$	$y^6+aay^4+b^4yy-a^6-2bby^4-a^4yy-2a^4bb-aab^4$	$y^4+2aayy-bbyy+a^4+aabb$
prodotto	$-y^6+aay^4 \quad +bby^4$	

I. Riduzione $0+2aay^4+b^4yy-a^6bby^4-a^4yy-2a^4bb-aab^4$

prodotto — $-2aay^4+2a^4yy+2aabbyy$

II. Riduzione — $0-bby^4+b^4yy-a^6+a^4yy-2a^4bb+2aabbyy-aab^4$

prodotto —— $bby^4-b^4yy \quad -aabbyy$

III. Riduzione —— 0 —— $0+a^4yy-a^6-2a^4bb+aabbyy-aab^4$

prodotto ——— $-a^4yy+a^6+2a^4bb$

IV. Riduzione ——— $0 \quad 0+aabbyy-a^4bb-aab^4$

prodotto ——— $-aabbyy+a^4bb+aab^4$

$0 \quad 0 \quad 0$

Dunque $\frac{y^6+aay^4+b^4yy-a^6-2bby^4-a^4yy-2a^4bb-aab^4}{yy-aa-bb} = y^4+2aayy-bbyy$ $+a^4+aabb$.

ESEMPIO IV.

Divisore	Dividendo	Quoziente
$3xx-aa$	$9x^4+12aax^3-4a^3x-a^4$	$3xx+4ax+aa$
prodotto	$-9x^4+3aaxx$	

I. Riduzione $0+12aax^3+3aaxx-4a^3x-a^4$

prodotto $-12ax^3 \quad +4a^3x$

II. Riduzione — $0+3aaxx-a^4$

prodotto —— $-3aaxx+a^4$

III. Riduzione —— $0 \quad 0$

Dunque $\frac{9x^4+12ax^3-4a^3x-a^4}{3xx-aa} = 3xx+4ax+aa$.

Si danno delle diviſioni, fatte le quali vi rimane qualche coſa, lo che ſuccede, quando in qualche riduzione non ſi trovano tutte le lettere del diviſore, o ſe trovanſi non ſerbano lo ſteſſo ſtato, ed ordine che hanno nel diviſore: allora ſi ſcrive il diviſore ſotto l'ultima riduzione; onde ne proviene ùn rotto, il quale ſi aggiunge al quoziente, come ſi vede nel ſeguente eſempio.

ESEMPIO V.

Diviſore	Dividendo	Quoziente
ac-dd	$aabc+ac^3-abdd-ccdd+d^4$	$ab+cc$
prodotto	$-aabc \quad +abdd$	
I. Riduzione	$o+ac^3-ccdd+d^4$	
prodotto	$-ac^3+ccdd$	
II. Riduzione	$o \quad o \quad +d^4$	

Dunque $\frac{aabc+ac^3-abdd-ccdd+d^4}{ac-dd} = ab+cc\ \frac{d^4}{ac-dd}$.

Si danno certe diviſioni che fino in infinito ſi poſſono continuare, ed è quando tutti i termini del diviſore non ritrovanſi nell'ultima riduzione; ed il quoziente ſia molto composto, nel qual caſo la diviſioue è inutile, perciò queſte ſorte di diviſioni devon ſuſſiſtere ſolo in quel luogo, dove il quoziente ſia ſempliciſſimo.

E' libero prendere nel diviſore composto qualſivoglia lettera per fare la diviſione, la quale preſa mai ſi può mutare: Così nel primo eſempio in cambio della lettera a, ſi ſarebbe potuta prendere la lettera b. Nel ſecondo eſempio in cambio di aa, ſi ſarebbe potuto prendere -ab, ovvero + cd ec., mentre ſempre ſi avrebbe lo ſteſſo quoziente.

Alcuna volta i coefficienti, o numeri che precedono i termini del diviſore, e del dividendo impediſcono, che non ſi poſſa fare la diviſione, nel qual caſo la diviſione ſi eſprime in modo di frazione: come ſe foſſe da dividere $3ab+c$, per $2a-c$, ſarà il quoziente $\frac{3ab+c}{2a-c}$. Lo ſteſſo ſi fa, quando il dividendo, ed il diviſore non hanno alcune lettere comuni; come $\frac{ad-3c}{d-r}$, e ancora $\frac{dx-dc}{a+x}$ ec.

Alcuna volta ancora la diviſione delle quantità composte ſi eſprime coll' includere il diviſore, e il dividendo fra parenteſi, fra queſte apponendovi due punti così $(a+b):c$, indica $a+b$, diviſo per c. Similmente $(2ax-ab):(a-c)$ moſtra che $2ax-ab$ è diviſo per $a-c$, come inſegna il Leibnizio.

E perchè alcuna volta è neceſſario conoſcere tutti i diviſori di qualche dato numero, o di qualunque data quantità Algebraticha, ac-

acciocchè fra essi si scielgano quelli che sono opportuni per fare le operazioni necessarie, ed il metodo di ciò fare è il seguente.

CAPITOLO VII.

Modo di trovare tutti i divisori di qualsivoglia quantità Algebratica.

AL Capitolo VII. della Parte seconda del primo Tomo insegnammo il modo di trovare tutti i divisori di qual sivoglia numero, ora la stessa regola deesi adoperare ancora nelle quantità Algebratiche, nella maniera che vedesi espresso quì sotto.

Sia verbigrazia la quantità Algebratica $a^3b + aabb$ della quale sieno da trovarsi tutti i suoi divisori.

$a^3b + aabb$	a
$aab + abb$	a. aa
$ab + bb$	b. ab. aab
$a + b$	$a + b$: $aa + ab$: $a^3 + aab$: $ab + bb$: $aab + abb$: $a^3b + aabb$
1	

Dividasi $a^3b + aabb$ per a, e il quoziente $aab + abb$, si scriva sotto di esso, e il divisore a se gli scriva contro dall'altra parte, come si vede di sopra, dopo dividasi $aab + abb$, ancora per a, e scrivasi il quoziente $ab + bb$ sotto gli altri, e il divisore a scrivasi sotto l'altro, poi dividasi $ab + bb$, per b, e si scriva il quoziente $a + b$ sotto i primi, e il divisore b sotto i divisori, finalmente diviso $a + b$ per $a + b$, scrivasi il quoziente 1, sotto gli altri, e il divisore $a + b$ sotto gli altri, moltiplicati poi i divisori, cioè proseguita l'operazione nel modo stesso che s'insegnò, al suddetto Capitolo VII. della seconda Parte del primo Tomo, da fare per i numeri, lo che fatto, come si vede di sopra, dalla parte dei divisori trovansi tutti i divisori della quantità $a^3b + aabb$, come cercavasi.

CAPITOLO VIII.

Delle Frazioni, o rotti Algebratici, e sue riduzioni.

UNA quantità intiera vien mutata in frazione, se presso essa quantità, come numeratore di una frazione se le porrà sotto l'unità per denominatore, come questi, $ab = \frac{ab}{1}$, ovvero $a+b = \frac{a+b}{1}$.

Una quantità intiera si riduce in frazione di un dato denominatore se si moltiplicherà pel dato denominatore, e sotto tal prodotto se gli ponga per denominatore il dato denominatore. Come se a vogliasi ridurre ad una frazione che abbia il denominatore b, sarà $\frac{ab}{b}$. Nello stesso modo volendo ridurre x, ad una frazione che abbia il denominatore $a + b$ sarà $\frac{ax+bx}{a+b}$.

Moltiplicato, o diviso per la stessa quantità, tanto il numeratore, quanto il denominatore di una frazione, la stessa frazione non muta valore. Sia per esempio moltiplicata in tal modo que-

ſta frazione $\frac{a}{b}$, per c ne viene $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$. Nello ſteſſo modo dividendo $\frac{bb}{bc}$, per b, ne viene $\frac{b}{c}$; ed $\frac{ax+bx}{a+b}$, diviſa per $a+b$, dà $\frac{x}{1}$, cioè x.

Per moltiplicare una frazione, per il ſuo denominatore, baſta cancellare lo ſteſſo denominatore, così per moltiplicare $\frac{ax}{c}$, per c baſta ſcrivere ax, e ſimilmente $\frac{bc}{a-b}$, moltiplicato per a-b, ſarà bc; ed $\frac{a}{2x}$, moltiplicato per 2x, ſarà a; e queſto perchè $\frac{2ax}{2x} = a$, come ſi è veduto di ſopra.

Se poi foſſe data una quantità intiera, con aſſieme una frazione da ridurre ogni coſa in frazione, ſi fa in queſto modo: Sia la quantità $a+\frac{bc}{n}$ da ridurre ad una frazione: moltiplicaſi la quantità intiera a, pel denominatore della frazione, cioè per n, e ne verrà $\frac{an+bc}{n}$, per la frazione ricercata. Nello ſteſſo modo $\frac{aa}{c}-b$, ridotto nel ſuddetto modo ſarà $\frac{aa-bc}{c}$.

Sia la frazione $\frac{aab}{ac}$ da ridurre in una frazione più ſemplice. Dividaſi tanto il numeratore, quanto il denominatore, per il diviſore comune, cioè per a; mentre il quoziente $\frac{ab}{c}$, che ne proviene, che è più ſemplice del primo, allo ſteſſo però è uguale, come reſta chiaro da ciò, che ſi è detto di ſopra: E per la ſteſſa ragione $\frac{2abc}{8acd}$, ſarà $\frac{1b}{4d}$, cioè $\frac{b}{4d}$.

Se poi il comune diviſore non ſi conoſceſſe con facilità, come ſuccede nelle quantità molto compoſte, in tal caſo deeſi trovare nel modo già inſegnato, tutti i diviſori del numeratore, e del denominatore, fra quali, quello ſcielgaſi per comun diviſore, che ſarà comune al numeratore, ed al denominatore. Sia dunque da ridurre la frazione $\frac{aac+abc}{aa-bb}$, tutti i diviſori del numeratore ſono a, c, $a+b$; quei del denominatore ſono a-b, ed $a+b$. Dunque il diviſore comune a tutti e due è $a+b$, il quale è il diviſore, che ſi cerca, per il quale diviſi tutti i termini della data frazione $\frac{aac+abc}{aa-bb}$, ne viene $\frac{ac}{a-b}$. E per la ſteſſa ragione $\frac{aac-aad}{cd-dd}$ dà $\frac{aa}{d}$, quando ſi ſarà diviſa pel comun diviſore c-d, che ſi è ritrovato nel modo detto di ſopra.

Quando poi foſſero da ridurre più frazioni ad una ſteſſa denominazione, ſi operi così. Sieno le due frazioni da ridurſi $\frac{a}{b}$, ed $\frac{c}{d}$, moltiplicanſi i due termini della prima frazione nel denominatore dell'altra, cioè $\frac{a}{b}$ in d, e i due termini della frazione ſeconda $\frac{c}{d}$ in b denominatore della prima, ovvero che è lo ſteſſo ſi moltiplichino in croce, nello ſteſſo modo che ſi fa ai numeri rotti, lo che fatto ne vengono le due frazioni $\frac{ad}{bd}$, ed $\frac{cb}{bd}$, della ſteſſa denominazione e uguali alle due prime date.

Se poi le frazioni da ridurre a uno ſteſſo denominatore foſſero più di due; moltiplicanſi tutti, e due i termini di ciaſcuna frazione nel prodotto, che riſulta dai denominatori delle altre frazioni, che ſi avranno le frazioni cercate. Sieno $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, moltiplicanſi

cansi i termini della prima $\frac{b}{a}$ in df, dippoi i termini della seconda $\frac{c}{d}$ in bf, ultimamente i termini della terza $\frac{e}{f}$, in bd, e si avranno queste tre frazioni, $\frac{adf}{bdf}$, $\frac{cbf}{bdf}$, $\frac{ebd}{bdf}$, uguali alle tre prime, e ridotte a una stessa denominazione, come volevasi.

Quando il denominatore di una frazione esattamente divide il denominatore dell'altra frazione, allora tali frazioni comodamente riduconsi a uno stesso denominatore col moltiplicare per esso quoziente il numeratore, e il denominatore di quelle frazioni, il di cui denominatore fu il divisore. Sieno da ridurre queste due frazioni $\frac{ab}{cd}$, ed $\frac{ef}{c}$, perchè il denominatore c divide esattamente il denominatore cd, moltiplicasi pel quoziente d tutti i termini della frazione $\frac{ef}{c}$, e saranno $\frac{ab}{cd}$, ed $\frac{edf}{cd}$, che sono ridotti alla stessa denominazione. Onde se fossero da ridursi $\frac{5}{8}$, e $\frac{3}{4}$, perchè 4 divide esattamente l'8 moltiplicato pel quoziente 2 tutti due i termini della frazione $\frac{3}{4}$, ne verranno $\frac{5}{8}$, e $\frac{6}{8}$ della stessa denominazione e uguali ai primi, come volevasi.

CAPITOLO IX.

Del sommare, e sottrarre le frazioni Algebratiche.

QUando le frazioni da sommarsi hanno lo stesso denominatore, come $\frac{a}{c}$, ed $\frac{b}{c}$, la sua somma sarà $\frac{a+b}{c}$, e per la stessa ragione $\frac{ad}{a+b}$, ed $\frac{cf}{a+b}$, sommate assieme fanno $\frac{ad+cf}{a+b}$.

Se poi saranno di diversa denominazione, come $\frac{a}{b}$, ed $\frac{c}{d}$, si riducano ad una stessa denominazione, come si è insegnato, e ne verranno le due frazioni $\frac{ad}{bd}$, ed $\frac{cb}{bd}$, la di cui somma sarà $\frac{ad+cb}{bd}$.

Se poi sono da sommarsi delle quantità intiere, con delle frazioni, come $a+\frac{ab}{c}$, ed $b-\frac{ac}{b}$, si possono aggiungere le intiere colle intiere, cioè $a+b$, e le frazioni, colle frazioni, così $\frac{ab}{c}$, ed $-\frac{ac}{b}$, che poi a uno stesso denominatore ridotte, ne verrà la somma cercata $a+b+\frac{abb-acc}{bc}$.

Si possono ancora ridurre le quantità intiere in frazioni, come le sue annesse, mentre $\frac{ac+ab}{c}$, ed $\frac{bb-ac}{b}$, che ridotte alla stessa denominazione saranno $\frac{abc+abb}{bc}$, ed $\frac{bbc-acc}{bc}$, la somma della quale è $\frac{abc+abb+bbc-acc}{bc}$.

Se poi fossero da sottrarre $\frac{a}{b}$, da $\frac{c}{b}$, la differenza sarà $\frac{c-a}{b}$. Se le frazioni sono di diversa denominazione, deonsi prima ridurre alla stessa denominazione. Sia da levare $\frac{a}{b}$ da $\frac{c}{d}$, riducansi ad una stessa denominazione, lo che fatto la cercata differenza sarà $\frac{bc-ad}{bd}$.

Se poi da una quantità intiera, come X, devasi levare la frazione $\frac{aa-ab}{a+b}$; ridotta prima la quantità X a una frazione dello stesso denominatore si avrà $\frac{ax+bx}{a+b}$, dalla quale levata $\frac{aa-ab}{a+b}$, ne rimarrà $\frac{ax+bx-aa+bb}{a+b}$.

Si-

Similmente se sarà dato da levare $b+\frac{cc}{b+d}$ da $a+b$, ridotta la prima quantità a una frazione, e l'altra alla frazione dello stesso denominatore della prima ne verrà il residuo $\frac{ab+ad-cc}{b+d}$, cioè $a-\frac{cc}{b+d}$.

Quando il numeratore di una frazione consta di più termini, giova alcuna volta la stessa frazione dividerla in più frazioni. Così $\frac{ab-cd+dd}{a-b}$, si può dividere in $\frac{ab}{a-b}$, $\frac{-cd}{a-b}$, $\frac{dd}{a-b}$. Ciò fatto dove qualche termine del numeratore è divisibile per il denominatore, e qualcheduno nò. Sia ancora $\frac{aa-3ab-bb}{a+b}$, si divida in $\frac{aa-bb}{a+b}$, ed $\frac{-3ab}{a+b}$, perchè $\frac{aa-bb}{a+b}=a-b$, sarà la proposta frazione $a-b-\frac{3ab}{a+b}$.

CAPITOLO X.

Del Moltiplicare le frazioni Algebraiche.

Sieno da moltiplicare due frazioni $\frac{a}{b}$, ed $\frac{c}{d}$, moltiplicansi fra di loro i numeratori, e i denominatori di ciascheduna, e ne viene il ricercato prodotto $\frac{ac}{bd}$. E per la stessa ragione, la frazione $\frac{a-b}{c}$, moltiplicata per $\frac{ab}{x}$, da nel prodotto $\frac{aab-abb}{cx}$, come volevasi.

Se poi fosse da moltiplicare la frazione $\frac{a}{b}$, per la quantità intiera c, basta moltiplicare il numeratore della frazione, nella quantità intiera, mentre il prodotto $\frac{ac}{b}$, sarà il ricercato, che è lo stesso che moltiplicare una frazione per un'altra frazione, se si supporrà l'unità, per denominatore della quantità intiera, come $\frac{c}{1}$. Ovvero si divide (se però si possa fare esattamente) il denominatore della frazione, per l'intiera quantità, mentre se ne avrà il prodotto. Sia perciò $\frac{a}{bc}$, da moltiplicare per c, dividasi il denominatore bc, per c, è il quoziente $\frac{a}{b}$, sarà il prodotto ricercato; imperocchè $\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}$, come è chiaro dalle cose dette di sopra. E per la stessa ragione, essendo da moltiplicare $\frac{ab-cd}{ac-ad}$, per $c-d$, dividasi $ac-ad$, per $c-d$, e il quoziente sarà a, dunque il prodotto cercato sarà $\frac{ab-cd}{a}$.

Sia da moltiplicare $a+\frac{aa}{b}$, per $b-\frac{cc}{d}$, riducansi le quantità intiere, nelle frazioni che hanno annesse, cioè $\frac{ab+aa}{b}$, ed $\frac{bd-cc}{d}$, sarà il loro prodotto $\frac{ab+aa\times bd-cc}{bd}$, cioè $\frac{abbd+aabd-abcc-aacc}{bd}$, ovvero $ab+aa-\frac{acc}{d}-\frac{aacc}{bd}$.

Si può ancora fare la suddetta moltiplicazione, senza ridurre le quantità intiere in frazioni moltiplicando $a\times b$, che si avrà ab, dopo $\frac{aa}{b}\times b$, e si avrà $\frac{aab}{b}$, come qui sotto.

$$\begin{array}{l} a+\frac{aa}{b} \\ b-\frac{cc}{d} \\ \hline ab+\frac{aab}{b}-\frac{acc}{d}-\frac{aacc}{bd} \end{array}$$

Ridotto dà come sopra $ab+aa-\frac{acc}{d}-\frac{aacc}{bd}$.

Se una frazione si moltiplica per il suo denominatore, il prodotto sarà lo stesso numeratore. Così $\frac{aa}{a+b}\times a+b$ dà aa.

Le-

Le quantità intiere ridotte in frazioni, come $\frac{ax}{b}$, che proviene da $\frac{a}{b}\times x$; ovvero $\frac{2ac}{3}$, che proviene da $\frac{2}{3}\times ac$, si possono esprimere l' una, e l' altra in questo modo $\frac{a}{b}\times$, ed $\frac{2}{3}ac$.

CAPITOLO XI.

Della Divisione delle frazioni Algebratiche.

SIA da dividere $\frac{a}{b}$, per $\frac{c}{b}$, cancellato il comun denominatore, poi si divida a per c, e ne verrà $\frac{a}{c}$, per il quoziente ricercato. Per la stessa ragione $\frac{3aab}{2c}$, ovvero $\frac{aab}{2c}$, diviso per $\frac{2ad}{3c}$, il quoziente sarà $\frac{3ab}{4d}$: imperocchè nella divisione delle frazioni, si fa lo stesso, che nella moltiplicazione, mutato però il denominatore della frazione del divisore in numeratore, è il numerarore in denominatore, dunque dividendo $\frac{a}{b}$, per $\frac{c}{b}$, inverso il divisore, e fatta la moltiplicazione, come abbiamo insegnato sarà $\frac{ab}{bc} = \frac{a}{c}$, come nel primo esempio.

Se i denominatori sono differenti, la regola è la stessa. Così $\frac{a}{b}$ divisa per $\frac{c}{d}$: dà il quoziente $\frac{ad}{bc}$: e nello stesso modo $\frac{a-b}{c+d}$, divisa per $\frac{n}{a}$, dà il quoziente $\frac{aa-ab}{nc+nd}$.

Sia da dividere la frazione $\frac{ac}{b}$, per la quantità intiera c dividasi (se si può, come nel suddetto esempio) il numeratore ac, per c; mentre il cercato quoziente sarà $\frac{a}{b}$. Similmente $\frac{ad-cd}{a+b}$ sia da dividere per a - c, dividasi ad - cd per lo stesso a - c, e si avrà d; onde il ricercato quoziente sarà $\frac{d}{a-b}$. Ovvero se il numeratore della frazione da dividersi, non è divisibile, moltiplicasi il denominatore della stessa frazione per l' intiero. Sia $\frac{ac}{b}$ da dividere per d, perchè ac non è divisibile per d, moltiplicasi per lo stesso d il denominatore, che si avrà il ricercato quoziente $\frac{ac}{bd}$. E per la stessa ragione $\frac{ad-cd}{a-b}$ sia da dividere per a + b, dà il quoziente $\frac{ad-cd}{aa-bb}$ trovato col moltiplicare $\overline{a-b}\times\overline{a+b}$. La ragione è chiara, mentre se sotto il divisore intiero si subintenda l' unità, cioè $\frac{a+b}{1}$ inverso, e fattane la moltiplicazione produce il quoziente, come sopra.

Se poi fosse da dividere $a+\frac{aa}{b}$, per $b-\frac{cc}{d}$, si riducano le quantità intiere nelle sue annesse frazioni, che fanno $\frac{ab+aa}{b}$, ed $\frac{bd-cc}{d}$, dividasi la prima per quest' ultima coll' inserire il divisore, e fare la moltiplicazione nel modo suddetto, che si averà il quoziente ricercato $\frac{abd+aad}{bbd-bcc}$.

Se poi le frazioni da dividersi fossero molto composte, allora per maggior facilità bisognerà avanti di fare la divisione ridurle nei termini più semplici, che sia possibile.

CA-

CAPITOLO XII.

Della formazione delle potestà, delle quantità semplici, e composte.

SE una quantità verbigrazia a, si moltiplica in se stessa, secondo ciò che si è detto nella moltiplicazione fà aa, che ancora si esprime per a^2, e si dice *quadrato*, ovvero *seconda potestà*, la di cui radice, ovvero lato è lo stesso a, che ancora chiamasi *prima potestà*. Se aa si moltiplicherà per lo stesso lato a ne verrà aaa, ovvero a^3, cioè il *cubo*, ovvero *terza potestà*. Se aaa un' altra volta si moltiplicherà per a, ne verrà aaaa, ovvero a^4, cioè il *quadrato-quadrato*, ovvero *quarta potestà*, e così in infinito, dalla qual cosa si avrà una serie di continuamente proporzionali, come la seguente a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7 ec.

Il numero scritto a destra della potestà, chiamasi, come abbiamo detto un'altra volta, *esponente*, ed ancora *indice della potestà*, il quale espone qual dimensione, o grado abbia tal potestà, ed indica il luogo che dee occupare nella sua serie: Mentre l'indice 4 indica che lo stesso a, è di quattro dimensioni, e che le compete il quarto luogo nella sua serie di proporzionali.

Deesi avvertire che v'è una gran differenza fra 2a, ed aa, ovvero a^2. Imperocchè 2a significa il doppio dello stesso a, ovvero $a + a$; ma a^2 significa la seconda potestà dello stesso a; onde posto $a = 3$, sarà $2a = 6$, ed $a^2 = 9$.

E' dunque chiaro, che per elevare qualsivoglia quantità semplice a qualche data potestà, basta moltiplicare la data quantità, tante volte in se stessa, e una di meno, quante unità contiene l'esponente della data potestà. Così acciocchè si elevi ab alla terza potestà, deesi moltiplicare ab due volte in se stesso; e si averà a^3b^3, e così degli altri.

Dalla qual cosa è facile, come lo stesso si possa speditamente avere moltiplicando gli esponenti della data quantità per l'esponente della potestà, alla quale tal quantità si vuole elevare: Così la terza potestà dello stesso ab, ovvero $a^1 b^1$, sarà $a^{1 \times 3} b^{1 \times 3} = a^3b^3$, e la quarta potestà dello stesso a^3 sarà $a^{3 \times 4}$, cioè $= a^{12}$, e la terza potestà di aab^3, ovvero $a^2 b^3$, sarà $a^{2 \times 3} b^{3 \times 3} = a^6 b^9$: e la terza potestà di $-a$, ovvero $-a^1$ sarà $-a^{1 \times 3} = -a^3$: e la quarta potestà dello stesso $-a$, ovvero $-a^1$ sarà $-a^{1 \times 4} = a^4$: e generalmente la potestà n di a^m sarà a^{mn}: e la potestà n dello stesso $-a^m$

sa-

sarà $\mp a^{ma}$, secondo che n significa numero pari, ovvero impari.

Le lettere m, n, r, sec. (come la lettera m posta quì sopra per denotare la potestà di a) indicano l'esponente di una potenza indeterminata, come a^m, a^n, a^r, le quali si possono determinare a qualsivoglia potenza, come terza, quarta, quinta ec. onde scrivendo verbigrazia $\overline{a+b}^2$, significa a + b, elevato alla seconda potestà, cioè fattone il quadrato, e così $\overline{ab-cd+xx}^3$, significa la quantità ab-cd+xx elevata alla terza potestà, cioè al cubo, e così dell'altre.

Da ciò ne siegue, che se si moltiplicherà un prodotto, ovvero una potestà per un altro prodotto, ovvero per un'altra potestà, nelle quali sieno le medesime lettere, basta aggiungere insieme i loro esponenti. Così $a^3 \times a^2 = a^{3+2} = a^5$: Ed $a^2 b^2 \times a^2 b^3 = a^{2+2} b^{2+3} = a^4 b^5$: Ed $a^3 \times a^{-5} = a^{3-5} = a^{-2}$, cioè $= \frac{1}{a^2}$, ed $a^3 \times a^{-3} = a^{3-3} = a^0 = 1$, perchè poi $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$, ed $a^0 = 1$, si osservi quì sotto.

Le potestà, i di cui esponenti hanno il segno negativo, come a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, a^{-4} ec. significano l'unità divisa per tal potestà, come a^{-1} è lo stesso che $\frac{1}{a}$; a^{-2} è lo stesso che $\frac{1}{aa}$; a^{-3}, significa $\frac{1}{aaa}$ ec. Imperocchè se sarà verbigrazia $\frac{aa}{aaaa}$, cancellato aa, tanto nel numeratore, quanto nel denominatore, si averà 1 (perchè $\frac{aa}{aa} = 1$), e rimarrà $\frac{1}{aa}$, che equivale allo stesso a^{-2}. Di quì ne nasce la serie delle potestà, che diconsi negative, come a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, a^{-4}, a^{-5} ec. che sono uguali a queste $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$, $\frac{1}{a^4}$, $\frac{1}{a^5}$ ec.

Il zero, ovvero nulla dicesi l'esponente dell'unità, in modo che a^0, significa lo stesso, che l'unità. Imperocchè posta la progressione Geometrica, incominciante da 1, cioè 1, 2, 4, 8, 16 ec. sarà $a^0 = 1$, $a^1 = 2$, $a^2 = 4$, $a^3 = 8$, $a^4 = 16$ ec.

Se poi si vuol elevare una qualche quantità composta a qualche potestà, è necessario nello stesso modo, che si disse delle quantità semplici, di moltiplicarla per se stessa, tante volte, e una meno, quante sono le unità contenute nell'esponente della data potestà. Così acciocchè a+b, si innalzi, o elevi alla terza potestà, bisogna moltiplicare a+b, in a+b, e si averà il prodotto aa+2ab+bb, il quale un'altra volta moltiplicato in a+b, dà $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$, che è la terza potestà, ovvero il cubo di a+b, e lo stesso deesi intendere degli altri.

Si può rendere più spedita l'operazione tutte le volte, che qualunque binomio sia da elevarsi al quadrato, nel seguente modo.

Scrivasi il quadrato del primo termine, + ovvero —, due volte il prodotto del primo termine nel secondo, + il quadrato del secondo termine: questi tre termini saranno il quadrato cercato se è un binomio, ma se sarà trinomio, scrivasi ancora +, ovvero — due volte il prodotto dei due primi termini nel terzo, + il

quadrato del terzo. Se è un quadrinomio, se gli aggiunga $+$; ovvero $-$ due volte il prodotto dei tre primi termini nel quarto, $+$ il quadrato del quarto, e così di seguito. Dunque il quadrato di $a - b + c$, sarà $aa - 2ab + bb + 2ac - 2bc + cc$. Questa abbreviazione è di molto uso nella pratica dell'Algebra, ed ecco un'altra regola più breve per elevare un binomio a qualsivoglia potestà.

Scrivasi nel primo termine la prima lettera del binomio elevata alla data potestà, nel secondo la stessa lettera elevata nella susseguente potestà minore, e moltiplicata nella seconda lettera; nel terzo la stessa prima lettera elevata alla potestà una meno della precedente, e moltiplicata nel quadrato della seconda lettera, e così di seguito, diminuendo in qualsivoglia termine una unità della potestà della prima lettera, e accrescendo un'unità alla potestà della seconda, finchè si pervenga al termine dove la stessa prima lettera resti d'una sola dimensione, e questo sarà il termine penultimo, e finalmente per l'ultimo termine scrivasi la seconda lettera innalzata alla stessa potestà che si elevò in principio la prima lettera. Così per elevare $a \pm b$ alla quarta potestà scrivasi $a^4 \pm a^3 b + aabb \pm ab^3 + b^4$. Se tutto il binomio è positivo, tutti i termini della potestà avranno il segno $+$; se poi la seconda lettera è negativa, i termini nei quali essa sarà innalzata a potestà impari, ovvero il suo esponente è numero imparo, devono avere il segno $-$; e tutti gli altri il segno $+$, come si vede di sopra.

La maniera poi di trovarvi i suoi corrispondenti coefficienti è la seguente. L'esponente del primo termine sarà il coefficiente del secondo; il prodotto poi che proviene dalla moltiplicazione del coefficiente del secondo termine nell'esponente che ha la prima lettera a del binomio nello stesso secondo termine, e diviso per 2 sarà il coefficiente del terzo termine; similmente il prodotto che si avrà dalla moltiplicazione del coefficiente del terzo termine per l'esponente, che ha la prima lettera nello stesso terzo termine, diviso per 3 sarà il coefficiente del quarto, e così degli altri; in modo che il prodotto proveniente dalla moltiplicazione dei coefficienti di qualsivoglia termine nell'esponente, che ha la prima lettera del binomio nello stesso termine, diviso pel numero indicante il luogo che occupa lo stesso termine fra l'ordine dei termini della potestà produce il coefficiente del seguente termine. Così la quarta potestà del suddetto binomio $a \pm b$ perfettamente formata è $a^4 \pm 4a^3b + 6aabb \pm 4ab^3 + b^4$, e lo stesso deesi intendere degli altri.

Se poi un qualche numero intiero, ovvero rotto, il quale preceda l'uno, o l'altro, o tutti e due i termini del binomio, allora si moltiplicherà il coefficiente di qualsivoglia termine della potestà per la potestà dello stesso numero eguale a quello, al quale è innal-

za-

zata la lettera a cui tal numero precede. Così dunque si eleverà $a+2b$ alla terza potestà; primieramente ad essa potestà deesi elevare il binomio $a+b$, che farà $a^3+3aab+3abb+b^3$, dopo moltiplicansi i coefficienti di quei termini nei quali trovasi il b, nella potestà del numero 2, uguale a quella potestà, nella quale è elevata la lettera b; dunque si moltiplicherà $3aab$ per 2, $3abb$, per 4, ed b^3 per 8, nel qual modo operato si averà $a^3+6aab+12abb+8b^3$ cubo del binomio $a+2b$, come volevasi.

CAPITOLO XIII.

Dell'estrazione delle radici dalle quantità Algebraiche; ed altre operazioni spettanti alle quantità radicali.

IN questo Capitolo abbiamo poste alcune cose spettanti alle quantità radicali, non v'abbiamo però posto tutto ciò che in tal materia sarebbesi potuto porre, ma vi si è posto quel tanto solo, che potrebbe ordinariamente accadere nel servirsi dell'Analisi, nelle operazioni numeriche, le quali occorrer potessero al nostro Aritmetico; chi più avanti desiderasse per poter poi aver l'accesso alla soluzione di qualsivoglia possibil dimanda, può da sè consultare gli Autori, che tal materia hanno trattato, come il Guisneo, il Padre Paolini, il Sig. Niccolò di Martino, e moltissimi altri, che ora quì non cale annoverarli; passando dunque a ciò che più preme dico.

Estraere le radici da qualche potestà, ovvero quantità Algebraticha, vuol dire fare un'operazione contraria all'operazione delle formazioni delle potestà delle quantità più semplici, quanto basta, acciocchè moltiplicata in se stessa quanto è necessario, produca la stessa potestà, ovvero quantità proposta.

Tanti sono i generi delle radici, quante sono le potestà, e a tutte le radici se gli attribuisce il nome della potestà, a cui sono riferite. Così quella quantità che una sol volta in se stessa fu moltiplicata, acciocchè ne fosse prodotta la potestà, di cui ella è radice, dicesi, *radice quadrata*, ovvero *seconda radice*, quella che due volte fu moltiplicata in sè, acciocchè ne fosse prodotta la potestà di cui ella è radice, chiamasi *radice cuba*, ovvero *terza radice*, quella che tre volte fu moltiplicata nominasi *radice quadrato-quadrata*, ovvero quarta radice; quella che quattro volte in se è moltiplicata chiamasi *radice quadrato-cuba*, ovvero *quinta radice ec.*

Per significare il nome radice, adoprasi il seguente carattere $\sqrt{}$, il quale chiamasi *segno radicale*, il quale acciocchè possa servire a qualsivoglia sorta di radice se gli aggiunge. l'esponente di quella potestà, alla quale si riferisce la radice che si vuole, il qual numero, o esponente chiamasi *esponente del segno radicale*. Così $\sqrt[2]{}$, ovvero semplicemente $\sqrt{}$ significa la radice quadrata, ovvero seconda radice; ed $\sqrt[3]{}$ significa la radice cuba, ovvero terza radice ec. perciò $\sqrt{ab}$, ovvero $\sqrt{aa+bb}$, oppure $\sqrt{aa+2ab+bb}$ indica che

 deesi

deesi estraere la radice quadrata da ab, ovvero da $aa+bb$, oppure da $aa+2ab+bb$ ec.

Se al segno radicale preceda un numero, o quantità litterale, come $2\sqrt{3}$, $a\sqrt{b}$ ec. la quantità che precede detto segno s' intende moltiplicare la radice, e tal quantità diceſi *fuori del segno*, cioè 2, ed a; da certuni le dette quantità vengon chiamate coefficienti. Quando a tai quantità niuna cosa precede sempre vi s' intende l' unità, come $1\sqrt{2}$, $1\sqrt{a}$ ec.

Quando poi fosse necessario di porre le quantità fuori del segno radicale, sotto il segno radicale, deesi prima tal quantità elevare a quella potestà, che indica l' esponente del segno radicale, e poi moltiplicarla per la quantità esistente sotto il segno radicale. Così $2\sqrt{3}$ sarà $\sqrt{12}$, $a\sqrt{b-c}$, sarà $\sqrt{a^2b-a^2c}$, e finalmente $a\sqrt[m]{bc}$, sarà $\sqrt[m]{a^mbc}$.

Deesi osservare se il braccio, o vincolo del segno radicale vada sopra tutte le quantità scritte dopo esso, come $\sqrt{aa+bb-cc}$, nel qual caso chiamasi *radice universale*; se poi non vi giunge, allora deesi intendere la radice sola di quella quantità posta sotto del vincolo, come $\sqrt{aa+bb}-cc$, vuol dire la sola radice di $aa+bb$, dalla quale poi deesi levare cc ec.

E perchè per elevare qualsivoglia quantità semplice a qualsivoglia potestà, moltiplicasi l' esponente di quella quantità nell'esponente della quantità proposta; perciò è chiaro, che per estraere una proposta radice, da qualche quantità semplice dovrassi dividere l' esponente di quella quantità per l' esponente del segno radicale conveniente, ovvero che torna lo stesso moltiplicare l'esponente della quantità proposta, per una frazione, il di cui numeratore sia l' unità, e il denominatore sia l' esponente del segno radicale, del quale si parla, Cioè per $\frac{1}{2}$, se si parla della radice quadrata; per $\frac{1}{3}$, se della cuba, per $\frac{1}{4}$, se della quadrato-quadrata ec. imperocchè i denominatori 2, 3, 4, sono gli esponenti dei segni radicali $\sqrt[2]{}$, $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$ ec. E perchè l' operazione dell' estrazione delle radici risulta simile all' operazione della formazione delle potestà, e si hanno gli esponenti per le radici non meno che per le potestà, imperocchè $\frac{1}{2}$ è l' esponente della radice quadrata; $\frac{1}{3}$ della cuba; $\frac{1}{4}$ della quadrato-quadrata ec. conseguentemente si può enunciare l' estrazion delle radici, col dire di elevare qualsivoglia quantità alle potestà $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, o se si dirà estraere la radice quadrata, cubica, e quadrato-quadrata.

Se dopo la moltiplicazione degli esponenti delle quantità proposte, per le frazioni dette di sopra, gli esponenti, che in forma di frazioni ne provengono tutti, si possono ridurre a numeri intieri, la proposta radice sarà quantità razionale; se una parte sola di essi si può ridurre in intieri, la rimanente sarà irrazionale, onde la

ra-

radice non si potrà estraere se non in parte, e la parte razionale si porrà avanti il segno radicale, e la parte irrazionale dopo il detto segno. Se poi alcuno esponente non si potrà ridurre in intiero, la radice non si potrà estraere da alcuna parte, e allora le quantità proposte deonsi por tutte sotto il segno radicale. Se finalmente gli esponenti che non possono ridursi ad intieri, eccedano l'unità, la potestà della lettera, di cui essi sono esponenti, sarà parte razionale, e parte irrazionale: E nello stesso modo deesi intendere, circa i coefficienti, che circa le lettere, trovata l'estrazione numerica delle radici, e servato il metodo di trovare tutti i divisori di qualsivoglia numero, come da seguenti esempj ogni cosa resterà chiaro.

Sia la quantità $a^2 b^4 c^6$, dalla quale debba estraersi la radice quadrata, ovvero debbasi elevare alla potestà $\frac{1}{2}$, moltiplicati gli esponenti 2, 4, 6 in $\frac{1}{2}$, si avrà $a^{\frac{2}{2}} b^{\frac{4}{2}} c^{\frac{6}{2}}$, e ridotti i detti esponenti fatti in forma di rotti, ad intieri, ne viene $ab^2 c^3$; di modo che la $\sqrt{a^2 b^4 c^6} = ab^2 c^3$, come è chiaro.

Similmente $\sqrt{a^2 b} = ab^{\frac{1}{2}}$; imperocchè a è la radice di aa, e $b^{\frac{1}{2}}$ è lo stesso che $\sqrt{b}$; parimenti $\sqrt{ab} = a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{ab}$, cioè $\sqrt{ab}$ è una quantità tutta irrazionale; ancora $\sqrt{a^3 b} = a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{1}{2}} = a^{1+\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} = a^1 a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} = a\sqrt{ab}$, finalmente $\sqrt{72 a^3 b^3} = 6ab \sqrt{2ab}$; imperocchè dai precedenti esempj è manifesto $\sqrt{a^3 b^3} = ab\sqrt{ab}$, come è ancora facile mostrare $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$; imperocchè se si cercheranno tutti i divisori del numero 72, e si esamineranno tutti i numeri quadrati, che in essi si trovano (se si trattasse dell'estrazione della radice cuba, si esaminerebbero tutti i cubi, e nello stesso modo deesi intendere delle altre radici) si troverà che il quadrato 36 è il massimo: ma $\frac{72}{36} = 2$ è $36 \times 2 = 72$. Perchè $\sqrt{72}$, si può considerare come il prodotto di $\sqrt{36} \times \sqrt{2}$: ma $\sqrt{36} = 6$. Dunque $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$; e perciò $\sqrt{72 a^3 b^3} = 6ab\sqrt{2ab}$. Colla stessa ragione si troverà $\sqrt{12aaab} = 2a\sqrt{3b}$; ed $\sqrt{6aabc} = a\sqrt{bbc}$; imperocchè il numero 6, non può dividersi da alcun numero quadrato, e nello stesso modo $\sqrt{aac+aax} = a\sqrt{c+x}$, perchè $aac+aax$, si divide pel quadrato aa; la di cui radice è a, e dà il quoziente $c+x$.

Nell'estrazione, poi delle radici composte di più membri, si può operare gli stessi modi, e regole, che s'è insegnato per estraere le radici dai numeri, ma quando i proposti membri non hanno la forma di quadrato, o di cubo, o di qualsivoglia altra più alta potestà, nel modo che insegnammo di sopra, nelle formazioni

ai delle potestà, in tal caso sarà vano di cercare la sua radice quadra, cuba, o di più alto grado, allora sotto il segno, e vincolo $\surd$, si porranno tutti i membri, da cui deesi estraere la radice. E perchè la quantità $aa+2ax+xx$, ha la forma del quadrato della radice del binomio $a+x$, dunque la sua radice quadrata sarà $a+x$; e similmente la radice cuba della quantità $a^3+3aax+3ax^2+x^3$, la sua radice cuba sarà $a+x$; ma della quantità $aa+ax$, in altro modo non si può esprimere la sua radice che così $\sqrt{aa+ax}$, che chiamasi quantità *sorda, o irrazionale*, e sono, come le radici non perfette dei numeri, le quali non si possono assegnare.

Si possono ancora sommare, sottrarre, moltiplicare, e dividere le suddette quantità sorde, e da esse ancora variamente connesse si possono estraere le radici; ed eccone la regola seguente, in termini generali: Sia $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, la loro somma è $\sqrt{4ab+a+b}$, ovvero $\sqrt{2\sqrt{ab}+a+b}$. Così $\sqrt{3}+\sqrt{12}=\sqrt{27}$, imperocchè 3, in 12, dà 36, onde $\sqrt{ab}=6$, ed $2\sqrt{ab}=12$, al quale aggiunto $a+b$, cioè $3+12$, ovvero 15, fa 27, perciò è comoda la suddetta pratica in quei numeri, o magnitudini che formano le radici, i quali assieme moltiplicati fanno quadrato, come quì 3, in 12, fa 36, e nello stesso modo si vede, che si possono ancora facilmente sommare le

$$\sqrt{32}+\sqrt{128}=\sqrt{288}$$
$$\sqrt{27}+\sqrt{48}=\sqrt{147}=\sqrt{75}+\sqrt{12}$$
$$\sqrt{7}+\sqrt{28}=\sqrt{63}$$

quantità, scrivendole una dopo l'altra, ciaschedune coi suoi segni, se sono simili si riducano, quando però sono quantità razionali. Così per sommare $2a\sqrt{b}$, con $3a\sqrt{b}$, scrivasi $2a\sqrt{b}+3a\sqrt{b}$, che riducesi a, $5a\sqrt{b}$; Sia $3a\sqrt{b}$, da sommare con $2c\sqrt{b}$, scrivasi $3a\sqrt{b}+2c\sqrt{b}$, ovvero $\overline{3a+2c}\sqrt{b}$, e nello stesso modo si farà delle seguenti quantità, come $a\sqrt{ax-xx}$, con $b\sqrt{ax-xx}$, scrivendo $a\sqrt{ax-xx}+b\sqrt{ax-xx}$, ovvero $\overline{a+b}\sqrt{ax-xx}$: e così $3a\sqrt{b}$, con $2c\sqrt{d}$ scrivasi $3a\sqrt{b}+2c\sqrt{d}$, e queste ultime quantità non possono avere altra espressione, o riduzione, operandosi nel suddetto modo.

Per sottrarre le quantità irrazionali scrivansi una dopo l'altra mutati i segni di quella quantità, che deesi levare, e se queste quantità sono simili, se ne faccia la riduzione, come nelle quantità razionali. Volendosi dunque sottrarre $3a\sqrt{b}$, da $5a\sqrt{b}$, scrivasi $5a\sqrt{b}-3a\sqrt{b}$, le quali quantità si riducono a questa $2a\sqrt{b}$: sia $3a\sqrt{2b}$, da levare da $5b\sqrt{2b}$, scrivasi $5b\sqrt{2b}-3a\sqrt{2b}$, ovvero $\overline{5b-3a}\sqrt{2b}$: Sia ancora $-2b\sqrt{ax-xx}$ da levarvi $3b\sqrt{ax-xx}$, scrivasi $3b\sqrt{ax-xx}+2b\sqrt{ax-xx}$, che si riduce così $5b\sqrt{ax-xx}$; Se poi sarà $2c\sqrt{d}$ da levare da $3a\sqrt{b}$, scrivasi $3a\sqrt{b}-2c\sqrt{d}$: le quali quantità non possono avere altra espressione.

Si può fare ancora così: Sia $\sqrt{a}$ da levarvi $\sqrt{b}$, cioè $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, sarà fatta la sottrazione, scrivendo così $\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$; così da $\sqrt{300}$ levata $\sqrt{48}$, rimane $\sqrt{108}$, imperocchè $a+b=348$, $ab=14400$,

ed

ed $ab = 120$, ed $2\sqrt{ab} = 240$, che levato dal 384, dà 108. Dunque $\sqrt{a+b} - 2\sqrt{ab}$, in questo caso vale $\sqrt{108}$. Da ciò è chiaro che bisogna che ab, cioè il prodotto di una quantità nell'altra sia quadrato, mentre non essendo, non si potrà estraere il doppio della sua radice dalla somma delle date quantità. E nello stesso modo si è fatto nei seguenti.

$\sqrt{2}$ da $\sqrt{18}$, resta $\sqrt{8}$
$\sqrt{5}$ da $\sqrt{45}$ resta $\sqrt{20}$
$\sqrt{162}$ da $\sqrt{392}$, resta $\sqrt{50}$

Per moltiplicare poi le quantità irrazionali si fa così; se le quantità da moltiplicarsi sono semplici, moltiplicasi la parte razionale nell'irrazionale, e la parte irrazionale nella razionale, dippoi il prodotto delle parti razionali si ponga avanti il segno radicale, e quello delle parti irrazionali dopo detto segno, e poi riducasi il totale prodotto alla sua più semplice espressione. Così $a\sqrt{b} \times c\sqrt{b} = ac\sqrt{bb}$: ma $\sqrt{bb} = b$, dunque $ac\sqrt{bb} = abc$. Dalla qual cosa appare, che quando le parti irrazionali sono simili, basta moltiplicare il prodotto delle parti razionali, per quella quantità, che si trova sotto il segno radicale. Similmente $a\sqrt{b} \times \sqrt{c}$, ovvero $a\sqrt{b} \times 1\sqrt{c}$ (si prende l'unità, per la parte razionale, quando nell'altra quantità vi si trova) $= a\sqrt{bc}$: Ed $2a\sqrt{b} \times 3b$, ovvero $2a\sqrt{b} \times 3b\sqrt{1} = 6ab\sqrt{b}$: Ed $2a\sqrt{bc} \times b\sqrt{ab} = 2ab\sqrt{abbc} = 2abb\sqrt{ac}$: Ed $2a\sqrt{3bc} \times 3b\sqrt{6ab} = 6ab\sqrt{18abbc} = 12abb\sqrt{2ac}$: Ed $a\sqrt{2b} \times 2b\sqrt{3c} = 2ab\sqrt{6bc}$: Ed $\sqrt[3]{ab} \times \sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{aabb}$: Ed $2a\sqrt[3]{ab} \times 3b\sqrt[3]{aa} = 6ab\sqrt[3]{a^3b} = 6aab\sqrt[3]{b}$ ec.

Se poi le quantità da moltiplicarsi sono composte, si moltiplicano tutti i termini di ciascheduna, per tutti i termini dell'altra, secondo la regola delle quantità semplici, e fattane la riduzione si avrà il total prodotto. Così $\sqrt{aa+bb} \times \sqrt{aa+bb} = aa+bb$: Ed $\sqrt{aa-bb} \times -\sqrt{aa-bb} = -aa+bb$: Ed $2a\sqrt{aa+bb} \times b\sqrt{aa+bb} = 2a^3b+2ab^3$, lo che è evidente, imperocchè essendo una quantità stessa sotto il segno radicale $\sqrt{}$, levato questo segno radicale, tal quantità sarà moltiplicata in se stessa.

Per moltiplicare $\sqrt{a+b} \times \sqrt{a-b}$, moltiplicasi $a+b$ per $a-b$, come se fossero quantità razionali, e si averà $\sqrt{aa-bb}$: parimenti $a+\sqrt{ab} \times b = ab+b\sqrt{ab}$: Ed $a+\sqrt{ab} \times \sqrt{bc} = a\sqrt{bc}+\sqrt{abbc} = a\sqrt{bc}+b\sqrt{ac}$: Ed $3a\sqrt{bc}-2b\sqrt{ac} \times 2c\sqrt{ab} = 6ac\sqrt{abbc}-4bc\sqrt{aabc} = 6abc\sqrt{ac}-4abc\sqrt{bc}$ ec.

Dalle suddette cose si conosce, che la moltiplicazione di una radice in un'altra, produce il lato, ovvero la radice della quantità prodotta, dalla loro muta moltiplicazione, com $\sqrt{a}$, in $\sqrt{b}$ dà $\sqrt{ab}$, e così.

$\sqrt{3}$ in $\sqrt{4}$ dà $\sqrt{12}$
$\sqrt{5}$ in $\sqrt{15}$ dà $\sqrt{75}$
$\sqrt{8}$ in $\sqrt{11}$ dà $\sqrt{88}$

On-

Onde quando i numeri semplici in se moltiplicati fanno quadrato, allora il prodotto delle date radici, sarà numero razionale così.

$$\sqrt{3} \text{ in } \sqrt{12} \text{ dà } \sqrt{36} = 6$$
$$\sqrt{2} \text{ in } \sqrt{32} \text{ dà } \sqrt{64} = 8$$

Per divider poi le quantità irrazionali, si scrive il divisore sotto del dividendo, in modo di frazione, e tal frazione sarà il quoziente ricercato; Se poi si conosca, che il dividendo sia prodotto del divisore, per un'altra quantità, come si disse delle quantità semplici, allora tal quantità si prenderà pel quoziente. Nelle quantità composte, dove il quoziente non si fa così manifestamente conoscere, si dovrà esaminare colla divisione se v'è, stando le suddette cose sarà $\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}} = b$, ed $\frac{ac\sqrt{bc}}{a\sqrt{b}} = c\sqrt{c}$, ed $\frac{12ac\sqrt{6bc}}{4c\sqrt{2b}} = 3a\sqrt{3c}$, ed $\frac{\sqrt{aa-xx}}{\sqrt{a+x}} = \sqrt{a-x}$, imperocchè $a+x \times a-x = aa-xx$ ec. Dunque perchè, come abbiamo detto di sopra, $\sqrt{a}$ divisa per $\sqrt{b}$ dà $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, ovvero $\sqrt{\frac{a}{b}}$, perciò in numeri ancora sarà, come siegue.

$\sqrt{288}$, per $\sqrt{18}$ dà 4
$\sqrt{12}$, per $\sqrt{27}$ dà $\frac{2}{3}$
$\sqrt{796}$, per $\sqrt{24}$ dà $\sqrt{33\,\frac{1}{6}}$

Dalla qual cosa è manifesto potersi avere il quoziente razionale, solamente quando le quantità poste sotto il segno radicale sono, come un numero quadrato, a un numero quadrato: Così c diviso per $\sqrt{c + \frac{cbb}{aa} + \frac{2bc}{a}}$ dà il quoziente $\frac{a}{a+b}$, perchè $c : c + \frac{cbb}{a} + \frac{2bc}{a} :: aa : aa + 2ab + bb$.

Le radici si elevano ancora a qualsivoglia potestà, e la regola si è di porre alla quantità posta di sotto il segno radicale, il numero, o segno della potestà che si vuole, senza alcun'altra variazione. Così $\sqrt[2]{a}$, elevata al quadrato sarà $\sqrt[2]{a^2}$, la radice quadrata di b, cioè $\sqrt[2]{b}$, elevata al cubo sarà $\sqrt[2]{b^3}$, e così $\sqrt[2]{3}$ elevata alla quarta potestà sarà $\sqrt[2]{81}$.

Se poi vi è qualche altra quantità suori del segno radicale, devesi elevare anch'essa alla data potestà. Così $a\sqrt[2]{c}$, elevata al quadrato sarà $a^2\sqrt[2]{c^2}$, perchè $a\sqrt[2]{c} \times a\sqrt[2]{c} = a^2\sqrt[2]{c^2}$. E per la stessa ragione $2\sqrt[2]{a}$, elevata al cubo sarà $8\sqrt[2]{a^3}$, perchè $2\sqrt[2]{a} \times 2\sqrt[2]{a} \times 2\sqrt[2]{a} = 8\sqrt[2]{a^3}$.

Se le quantità radicali da elevare a qualunque potestà sono composte, si elevano alla data potestà, come se fossero quantità razionali, cioè se sono da elevarsi al quadrato, deesi prendere il quadrato delle parti, e il doppio di ciò che sarà provenuto dalla mutua moltiplicazione di esse parti sarà il quadrato cercato. Se si vuole elevare al cubo deesi prendere il cubo delle parti, ed il triplo che si avrà dalla moltiplicazione del quadrato delle prime, per la seconda, e il triplo che ne nasce dalla vicendevole moltiplicazione del quadrato della seconda, per la prima sarà il cercato cubo, e così

sì deesi intendere delle altre potestà così $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{c}$, elevate al quadrato fanno per la prima parte il quadrato delle parti, cioè $\sqrt[3]{a^2}$, ed $\sqrt[3]{c^2}$, il di cui duplo è $2\sqrt[3]{ac}$, dopo sarà $\sqrt[3]{a^2} + 2\sqrt[3]{ac} + \sqrt[3]{c^2}$. Similmente $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ innalzate alla seconda potestà sarà $a - 2\sqrt{ab} + b$. Se sarà $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ da elevare al cubo, o terza potestà, si faccia per la prima parte il cubo di $\sqrt{a}$, ed $\sqrt{b}$, cioè $\sqrt{a^3}$ $\sqrt{b^3}$, prendasi il triplo dalla moltiplicazione del quadrato della prima radicale, cioè a, nella seconda, cioè $3a\sqrt{b}$, e vicendevolmente il triplo del quadrato della seconda, cioè b, che moltiplicati nella prima, cioè $3b\sqrt{a}$: e aggiuntivi gli altri fà $\sqrt{a^3} + 3a\sqrt{b} + 3b\sqrt{a} + \sqrt{b^3}$. E per la stessa ragione $\sqrt{3} - \sqrt{2}$, elevate al cubo, sarà $\sqrt{27} + 9\sqrt{2} + 6\sqrt{3} + \sqrt{8}$.

Come che i radicali semplici si possono considerare, come potenze imperfette, si possono elevare a qualsivoglia data potestà, prendendo il duplo, il triplo, il quadruplo ec. dei loro esponenti, se si vogliono elevare alla seconda, terza, ovvero quarta potestà.

Sia $\sqrt{a}$ da elevare alla terza potestà sarà $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$, prendendo il triplo di esso esponente sarà $a^{\frac{3}{2}} = \sqrt{a^3}$, e questo perchè $a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{2}}$.

Se la quantità radicale sia da elevare ad una potestà, il di cui esponente sia lo stesso, che quello dello stesso radicale, ne proverrà una quantità razionale, e per ciò fare basta cancellare il segno radicale. Imperocchè $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = \sqrt{9} = 3$. Sia ancora $\sqrt[3]{2}$ da elevare al cubo, questo sarà 2; Imperocchè $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{8} = 2$. Onde $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$, e di quì $a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{2}} = a$. Parimenti $\sqrt[3]{c} = c^{\frac{1}{3}}$, che elevata alla terza potestà fa $c^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = c^{\frac{3}{3}} = c$.

Per estraere la radice da una quantità radicale, come verbigrazia la radice quadrata dalla $\sqrt{a}$, perchè $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$, dividasi l' esponente dello stesso $a^{\frac{1}{2}}$, per l'esponente della radice cercata; onde sarà la radice quadrata cercata $a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}$. Sia similmente da estraere la radice quadrata da $\sqrt[3]{a}$, perchè $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$, dividendo l' esponente $\frac{1}{3}$, per l' esponente 2, della cercata radice, ne verrà la cercata radice $a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}$. Finalmente cercasi la radice cu-

cuba di $\sqrt{a}$, perchè $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$, se si dividerà per l' esponente della cercata radice, cioè per 3 l' esponente $\frac{1}{2}$, ne verrà la cercata radice cuba $a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}$.

Di qui è chiaro, che per estraere le radici nel suddetto modo basta moltiplicare l' esponente del segno radicale, per l' esponente della cercata radice. Così la radice quinta, della quantità $\sqrt[2]{2}$ sarà $\sqrt[10]{2}$, che ancora si può esprimere così $\sqrt[5]{\sqrt{2}}$, $\sqrt[5]{\sqrt{2}}$, $\sqrt{\sqrt{2}}$ ec. che è il metodo che si adoperò di sopra, nell' insegnare la sommazione delle quantità radicali, come da sè è manifesto.

Si estrae la radice dalle quantità composte d' intieri, e di radicali, in questo modo. Sia la quantità $a + \sqrt{b}$ sarà $\sqrt{a+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a+\sqrt{aa-b}}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{a-\sqrt{aa-b}}}{\sqrt{2}}$, e se si avrà $\sqrt{a-\sqrt{b}}$ sarà $= \frac{\sqrt{a+\sqrt{aa-b}}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{a-\sqrt{aa-b}}}{\sqrt{2}}$.

Sia da estraere la radice da $3+\sqrt{8}$, ponendo $a = 3$, sarà $aa = 9$; $b = 8$; onde $aa-b = 1$, ed $a+\sqrt{aa-b} = 3+1 = 4$, la di cui radice è 2, la quale divisa per $\sqrt{2}$ dà $\sqrt{2}$; ma $3-1 = a-\sqrt{aa-b} = 2$, la di cui radice divisa per 2, cioè per se stessa da 1, e così $\sqrt{3+\sqrt{8}} = \sqrt{2}+1$.

CAPITOLO XIV.

Delle Equazioni semplici.

E*Quazione*, chiamasi la comparazione di due quantità, col segno dell' egualità, come $x = a$, $xx+2ax = ab$ ec. Le quantità poste a destra, ed a sinistra del segno dell' egualità, come x, ed a, nella prima equazione, e ancora $xx+2ax$, ed ancora ab della seconda chiamansi *membri dell' equazione*.

Un' equazione chiamasi *semplice*, ovvero *di primo grado*, dove la quantità incognita è di una sola dimensione, come $x = a+b+c$: chiamasi *quadratica*, ovvero *di secondo grado* se è di due dimensioni, come $xx = ab$: *Cubica*, ovvero *di terzo grado*, se è di tre dimensioni, come $x^3 = a^2+b^2$, e così delle altre, ma per quello che abbiamo prefisso d' insegnare, basta quella del primo, e del secondo grado, non volendo noi passar più avanti.

Un' equazione chiamasi *affetta*, quando la quantità incognita ha diverse potestà, o dimensioni, come $x^2+ax = ab$, che chiamasi equazione *quadratica affetta*; e così deesi intendere delle altre, benchè a noi ciò non importa, non passando più oltre. Diconsi ancora *pure*, quando l' incognita da per tutto ha la stessa dimensione, come $ax+bx = cd$, ovvero $bxx = cdd$ ec.

Radice di un' equazione è il valore dell' incognita, che entra nell' equazione, onde nell' equazione $x = a+b$ la radice è $a+b$: imperocchè tanto vale x, quanto l' aggregato $a+b$. Similmente nell'

nell'equazione $x^2 = a-c$, estratta da tutti due i membri la radice quadrata, la radice dell'equazione, ovvero valore dell'incognita x è $\sqrt{a-c}$.

Se il valore dell'incognita è positivo, come $x = 3$, la radice si chiama vera. Se poi è negativo, chiamasi *negativa*, ovvero *falsa*, come la chiama Cartesio, nel qual caso però è sempre reale: imperocchè se uno deve dare scudi 50, e non ne ha alcuno, in tal caso si può asserire avere -50. Ma se il valore dell'incognita si esprime per una radice quadrata negativa; come $x = \sqrt{-a^2}$, la radice chiamasi *immaginaria*, e impossibile, nè si può dare un tal quadrato, imperocchè $+a \times +a$ dà $+a^2$, e così $-a \times -a$ dà pure $+a^2$.

Egli è chiaro non togliersi l'egualità, se uno, o quale che a noi piace dei termini di un membro di una equazione si trasferirà nell'altro membro, mutando i suoi segni. Come se sarà $x+2 = 5$, non si toglierà l'egualità, se si farà $x = 5-2$.

Non togliesi nè meno l'egualità, se a tutti due i membri dell'equazione si aggiungerà, ovvero si leverà una quantità uguale. Ovvero se per la stessa, o uguale quantità si moltiplicheranno, o si divideranno tutti due i membri dell'equazione. Imperocchè sia $x = 3$, moltiplicando per 3, sarà $3x = 9$; o dividendo per 3 sarà $\frac{1}{3}x = 1$.

Neppure togliesi l'egualità, se tutti e due i membri dell'equazione si eleveranno alla stessa potestà, ovvero da tutti e due si estraerà una stessa radice. Sia perciò $y = ab$, sarà $y^n = \overline{ab}^n$, e al contrario se sarà $y^2 = a-b$, estratta da tutti e due i membri la radice sarà $y = \sqrt{a-b}$.

Finalmente non togliesi l'egualità, se nell'uno, o l'altro membro dell'equazione in cambio d'esso vi si porrà un'altra quantità uguale o semplice, o composta che siasi. Come se sarà $x^2 = ay+by$, e si porrà $d = a+b$, sarà $x^2 = dy$: la qual cosa chiamasi *sostituire*, lo che nell'Algebra è di un grande, e continuo uso, come si vedrà.

CAPITOLO XV.

Nel quale si spiegano varie regole spettanti alla riduzione delle Equazioni.

Tutte le equazioni sogliono contenere delle quantità note con delle incognite assieme, secondo le condizioni del proposto Problema. Queste quantità debbonsi tanto rivolgere, e mutare, affine di ottenere l'equazione, ridotta alla maggiore e più semplice forma, che si possa, la quale poi sarà l'ultima conclusione, alla quale riducesi tutta la difficoltà del Problema, e quest'ultima equazione così ridotta vien chiamata *equazione finale*. Per far la qual cosa deesi avvertire alle seguenti regole.

I. L'equazione riducesi a pochi termini, col trasferire i termini da una parte all'altra, sotto il segno contrario, mentre come abbiamo detto di sopra, restano sempre in egualità. Così $x-3=12$ sarà per transposizione $x=12+3$, cioè $x=15$. Similmente sia $x-b=a$, sarà $x=a+b$, e la ragione è chiara, mentre aggiungesi da tutti i lati $+3$, e nel secondo esempio aggiungesi $+b$.

Per la stessa ragione se sarà $x+3=5$, sarà ancora per transposizione $x=5-3$, cioè $x=2$. Ancora $x+b=a$, sarà $x=a-b$, la qual cosa è ugualmente chiara, mentre si leva da tutti i lati -3; e nel secondo esempio levasi $-b$. Questa transposizione viene chiamata *Antitesi*.

II. Se poi nell'equazione vi sono delle frazioni, allora l'equazione si riduce colla moltiplicazione, cioè col moltiplicare tutti i termini, per i denominatori delle frazioni, moltiplicando tutti i denominatori, uno dopo l'altro in tutta l'equazione; ovvero che è lo stesso, moltiplicare una volta il prodotto di tutti i denominatori nell'equazione, e poi ridurre le frazioni ai minimi, e più semplici termini. Sia dunque l'equazione $\frac{abd}{c}+dx=\frac{bcd}{a}$, moltiplicasi prima tutta l'equazione per c, dopo per a; ovvero una volta per ac, e si averà $\frac{aabcd}{c}+acdx=\frac{abccd}{a}$, e ridotti i termini sarà $aabd+acdx=bccd$, e ciò è chiaro, come si disse di sopra, che non mutasi l'egualità, moltiplicando tutta l'equazione per cose uguali, levando il denominatore alla frazione moltiplicata, come è manifesto.

III. Si fa la riduzione delle equazioni, col dividere ciascun membro per una stessa quantità, come se fosse $3x=12$, dividendo per 3 sarà $x=4$, eguale alla prima equazione. Similmente sia $ax+bx=ac$, dividendo per $a+b$, sarà $x=\frac{ac}{a+b}$. Finalmente sia $axx+fxx=gh$, sarà $xx=\frac{gh}{a+f}$.

IV. Si riducono ancora le equazioni, coll'elevare i loro termini ad una qualche potestà, e si fa allora quando la quantità incognita trovasi sotto il segno radicale. Come se sarà $\sqrt{xx-aa}+b=c$, trasportasi da una parte sola dell'equazione, quelle quantità che hanno, sono sotto il segno radicale, facendo $\sqrt{xx-aa}=c-b$, poi elevasi ciascuna parte dell'equazione al quadrato, e sarà $xx-aa=c^2-2cb+b^2$. Similmente se sarà l'equazione $m-\sqrt{4dx+4d^2}=\sqrt{2dx+d^2}$, elevato ciascun membro al quadrato si avrà $m^2-2m\sqrt{4dx+4d^2}+4dx+4d^2=2dx+d^2$, e fatta la riduzione sarà $m^2-2m\sqrt{4dx+4d^2}+2dx+3d^2=0$. Pongasi ora nel luogo dell'altro membro dell'equazione, dove ora è il zero, la quantità radicale che rimane sarà $m^2+2dx+3d^2=2m\sqrt{4dx+4d^2}$, e di nuovo elevato ciascun membro al quadrato, svanirà la quantità radicale, e si avrà $m^4-12dxm^2-10d^2\ m^2+4d^2\ x^2+12d^3\ x+9d^4=0$. Questo modo di ridurre le operazioni vien chiamato per *Asymetria*.

V. Si

V. Si riducono ancora le equazioni, estraendo da ciascheduno membro la radice; come se sarà $xx = 16$, estratta la radice da tutti due i membri sarà $x = 4$. Similmente nell' equazione $xx = aa - 2ab + bb$, estratta la radice sarà $x = a - b$.

VI. Riduconsi ancora più equazioni in una sola, sostituendo il valore di una incognita, nel luogo di essa. Come sia l'equazione $x - y = a$, sia ancora $a - x$, il valore dell' incognita y, il quale deesi sostituire nel luogo della stessa y: fatta la sostituzione, e variato il segno, perchè è $-y$, si averà l'equazione $x - a + x = d$, cioè $2x = a + d$, onde sarà $x = \frac{a+d}{2}$. E per la stessa ragione sia $x^2 + y^2 = d^2$, ed ancora sia $a - x$, il valore di y, il quale per sostituirlo nel luogo di $+y^2$, si farà il quadrato di $a - x$, cioè $aa - 2ax + xx$, il quale posto nel luogo della stessa y^2, sarà l'equazione $x^2 + a^2 - 2ax + x^2 = d^2$; ovvero sarà $2x^2 - 2ax = d^2 - a^2$.

Deesi avvertire a queste cose molto utili, prima di porre l'incognita in una parte dell'equazione, e trasferire tutte le altre quantità nell'altra parte, che si averà il valore della stessa incognita. Così nell' equazione $x + y = 100$, per transposizione sarà $x = 100 - y$, ed allora $x - y$, dicesi il valore dell' incognita x.

Le quantità negative si possono far divenir positive, ed al contrario le positive si posson far venir negative, col trasferirle nella parte opposta, sotto il segno contrario. Così nella seguente equazione $a - x = b + c$, l' incognita x, si fa positiva, e si può avere il suo valore, fatta la transposizione delle quantità nell' altra parte sotto il segno contrario, onde sarà $a - b - c = x$.

Quando in tutti e due i membri di una equazione vi sarà la stessa quantità sotto lo stesso segno, queste quantità si possono cancellare tutte e due, e l'equazione resterà più semplice, come se sarà $xx + ab - c = d - c + ab$, l'equazione si riduce così $xx = d$.

Nel ridurre le equazioni devesi avvertire, che tutte le incognite di qualsivoglia grado elle sieno, si trovino in uno stesso membro dell'equazione, e nell'altro le quantità cognite, lo che colle regole già insegnate facilmente si ottiene.

Ridurre più equazioni semplici in una sola.

Sieno da ridurre in una sola equazione le due equazioni semplici $x + y = a$; $x - y = b$. Si sommino insieme, e sarà $2x = a + b$. Ovvero sottraggasi la seconda dalla prima, si averà $2y = a - b$, come dalle cose dette è chiaro.

Sieno ancora le seguenti tre equazioni da ridurre in una sola, cioè

$$x + y = a$$
$$x + z = b$$
$$y + z = c$$

Prendasi dalla prima equazione il valore della incognita y, e si avrà $y = a - x$, e nella seconda il valore dell' incognita z, sarà $z = b - x$; questi due valori sostituiscansi nella terza equazione in luo-

luogo di y, e di z, e si avrà $a-x+b-x=c$, e fatta la riduzione sarà $a+b-c=2x$, cioè $x=\frac{a+b-c}{2}$.

Se poi saranno più le equazioni da ridurre in una sola, come le seguenti, cioè

$$x+y+z=a$$
$$x+y+u=b$$
$$x+z+u=c$$
$$y+z+u=d$$

Prendasi dalla prima equazione il valore della quantità x, che sarà $x=a-y-z$, il quale posto nelle equazioni seconda, e terza ne provengono le due equazioni $a-z+u=b$; $a-y+u=c$, del valore delle suddette due. Prendasi dippoi dalla equazione prima di queste due ultimamente fatte, cioè da $a-z+u=b$, il valore della incognita z, e ne verrà l'equazione $z=a+u-b$. Similmente dalla seconda delle suddette due prime equazioni, cioè da $a-y+u=c$ prendasi il valore dell'incognita y, si avrà l'equazione $y=a+u-c$, questi due valori si pongano nell'ultima delle quattro prime equazioni, cioè in quella che è $y+z+u=d$, e ne verrà l'equazione $2a+3u-b-c=d$, nella quale non trovasi che la sola incognita u, il di cui valore $\frac{b+c+d-2a}{3}$, se si sostituirà nelle equazioni trovate di sopra, cioè $z=a+u-b$; $y=a+u-c$, in luogo della quantità u, si faranno manifeste le incognite z, e y, e se finalmente questi valori si sostituiranno nella equazione trovata di sopra, cioè $x=a-y-z$ sarà ancor manifesta l'incognita x.

Acciocchè queste riduzioni si possano fare, è necessario che la stessa incognita ritrovisi in più equazioni, come dai suddetti esempj è manifesto, onde resta chiaro, che dal mutare, sostituire, moltiplicare ec. le equazioni secondo che si conoscerà necessario, si avrà quello che cercasi.

Altre cose sogliono aggiunger quì i Trattatisti di questa Dottrina, spettanti particolarmente alle proporzioni Aritmetiche, e Geometriche, le quali molto servono per la soluzione dei Problemi, o quesiti che possono esser dati; ma perchè noi ciò abbondantemente abbiamo fatto nei Tomi addietro della nostra Aritmetica, nei suoi rispettivi luoghi, perciò quì si tralascieremo per non ridir ciò che un'altra volta abbiamo detto.

CAPITOLO XVI.

Modo di ridurre i Quesiti alla equazione.

PRendansi per le quantità incognite le ultime lettere dell'Alfabetto, come x, z, y ec. acciocchè restino distinte dalle quantità cognite, o date, le quali quantità note, o date si notano colle prime lettere, come a, b, c, d ec. come già dicemmo.

Dopo di aver denominata ciascuna cosa nota, od ignota della dimanda, colle lettere, come abbiamo detto, si esprimono poi tutte le condizioni della dimanda, e tutte le relazioni che si danno

no fra le cognite, e le incognite, ovvero quantità che si cercano, e da tutte queste cose insieme, tante equazioni si formino, quante sono le incognite che si sono prese: ma ciò si apprende con più chiarezza dall'uso, che dalle parole; perciò veniamo agli esempj.

QUESITO I.

Cercansi due numeri, la di cui somma sia 100, e la loro differenza sia 30.

Il maggior numero cercato sia $= x$, il minore $= y$ la loro somma $= 100$, e la loro differenza $= 30$. Dunque dalle condizioni del Quesito, si trovano queste due equazioni $x + y = 100$, ed $x - y = 30$. Dalle suddette due equazioni separata una stessa incognita in tutte, e due ne viene $x = 100 - y$ in una, e nell'altra $x = 30 - y$, queste due equazioni paragonate una con l'altra, cioè ugguagliati fra di loro i due valori di x, così $100 - y = 30 + y$, e da questa equazione separata l'incognita ne viene $y = \frac{70}{2}$, cioè $y = 35$, e perchè il valore dell'altra incognita x l'abbiamo trovato in una delle suddette due equazioni uguale a $100 - y$, ovvero a $30 + y$, posto per y, il 35 suo valore trovato, prendendo $100 - 35$, ovvero $30 + 35$, nell'uno, o nell'altro modo ne viene $65 = x$, come tutto si vede quì sotto.

$$x + y = 100 \qquad x - y = 30$$
$$x = 100 - y \qquad x = 30 + y$$
$$100 - y = 30 + y$$
$$100 - 30, \text{ cioè } 70 = 2y$$
$$\frac{70}{2} = y$$
$$\text{cioè } 35 = y$$
$$100 - 35, \text{ ovvero } 30 + 35 = 65 = x$$

Operando poi in termini generali, col porre la somma 100 dei numeri che cercansi $= a$, e la loro differenza $= b$, ne avremo queste due equazioni $x + y = a$ l'una, l'altra $x - y = b$, colle quali poi operato nello stesso modo mostrato di sopra si avrà $y = \frac{a-b}{c}$, ed $x = a - \frac{a-b}{2}$, ovvero $= b + \frac{a-b}{2}$, onde preso $a - b$, cioè $100 - 30$, cioè 70, e diviso per 2, dà 35, valore di y, e per x, levando questo y, cioè 35 da 100, od aggiungendolo a 30 dà 65, valore dello stesso x, come si ebbe di sopra, e come per maggior chiarezza vedesi fatto quì sotto.

$$x + y = a \qquad x - y = b$$
$$x = a - y \qquad x = b + y$$
$$a - y = b + y$$
$$a - b = 2y$$
$$\frac{a-b}{2} = y$$
$$a - \frac{a-b}{2}, \text{ ovvero } b + \frac{a-b}{2} = x.$$

Quando si possono sciorre i quesiti con una sola incognita, non se ne deono adoprare di più per maggior facilità, perciò nel sud-

det-

detto Quesito si può fare con una sola, ponendo il maggior numero $=x$; l'altro dunque secondo la condizione della dimanda sarà $a-x$, onde si farà la seguente equazione $x-a+x=b$, lo che poi operato nel solito modo dà $x=\frac{b+a}{2}$, cioè $=65$, ed $a-x=35$, come sopra, lo che vedesi fatto quì sotto.

$$x-a+x=b$$
$$2x=b+a$$
$$x=\frac{b+a}{2}=65$$
l'altro $=a-x$, cioè $=35$

Di quì si vede, che quante meno incognite si possono adoperare, con più facilità, e speditezza, si sciolgono i Problemi, come si è veduto in quello di sopra. Onde se si cercassero due quantità, delle quali una sia tripla dell'altra; se una si denominerà x, troverà comodo denominare l'altra $3x$, più tosto che adoperare l'altra incognita y. E nello stesso modo se fosse bisogno di trovare tre quantità continuamente proporzionali, come x, z, y, sarà più comodo prendere le sole due incognite x, z, e per y pigliare $\frac{zz}{x}$, mentre si è veduto nella nostra Aritmetica, che di tre quantità continuamente proporzionali, il quadrato della seconda, diviso per la prima dà la terza quantità proporzionale; e nello stesso modo deesi sempre fare, quando ciò torni comodo.

Deesi osservare nella formazione delle equazioni di instituirle rettamente, e chiare, mentre dalla loro facile, o difficile constituzione, o formazione, riesce più, o men facile la soluzione dei quesiti; onde per maggior chiarezza di ciò seguiremo a mostrare l'applicazione dell'Analisi, con altri quesiti.

QUESITO II.

Un Cane corre dietro un Lepre, e v'è distante 100 passi, e la velocità del Cane, a quella del Lepre è come 3 a 2; cercasi a quanti passi di distanza il Cane raggiugnerà il Lepre.

Mentre che il Cane fa li 100, passi, che chiamo a, in questo mentre il Lepre trascorrerà lo spacio $=x$, resterà dunque al Cane lo spacio $=a+x$ da precorrere per raggiunger il Lepre, dalla qual cosa si ha la seguente analogia. $a+x.x::3.2$, ed in termini generali $a+x.x::m.n.$, moltiplicati poi gli estremi, e i medii si avrà la seguente equazione $mx=an+nx$, come abbiamo mostrato nelle operazioni, poi si opererà come quì sotto.

$$a+x.x::m.n$$
$$mx=an+nx$$
$$mx-nx=an$$
$$x=\frac{an}{m-n}$$

Posto dunque $a=100$, $m=3$, $n=2$, sarà 100, moltiplicato in 2, cioè an, e diviso per $3=2$, cioè per $m-n=200$, che è il valore di x, dunque $x=200$, ed $a+x=300$, onde si vede che dopo 300 passi il Cane raggiugnerà il Lepre.

QUE-

QUESITO III.

Tre mercanti in una società guadagnarono una certa somma di scudi che non si sà. Si sà solo che il guadagno del primo, con quello del secondo fanno scudi 100; e quello del primo con quello del terzo fanno scudi 120, e finalmente quello del secondo col terzo fanno scudi 160. Cercasi il guadagno di ciascheduno.

Posti i scudi 100 $= a$; i scudi 120 $= b$, e i scudi 160 $= c$, e posto ancora il guadagno del primo $= x$, quello del secondo $= z$, e quello del terzo $= y$, sarà per la condizione del Quesito.

$$x + z = a \qquad z = a - x$$
$$x + y = b \qquad y = b - x$$
$$z + y = c$$

Facciasi la riduzione, come si è insegnato nell' antecedente Capitolo, cioè prendasi dalla prima equazione il valore della quantità z, che sarà $z = a - x$, e nella seconda il valore dell' incognita y, che sarà $y = b - x$, questi due valori sostituiscansi nella terza equazione in luogo di z, e di y, e si avrà $a - x + b - x = c$, e fatta la riduzione sarà $a + b - c = 2x$, cioè $x = \frac{a+b-c}{2}$. Ciò fatto nelle suddette due equazioni $z = a - x$, ed $y = b - x$ in cambio di x, se le ponga il suo valore trovato di sopra, cioè $\frac{a+b-c}{2}$, lo che fatto resterà cognito il guadagno di ciascheduno, mentre dopo fattone le solite riduzioni verrà, come si vede quì sotto.

$$x = \frac{a+b-c}{2}$$
$$z = \frac{a-b+c}{2}$$
$$y = \frac{b-a+c}{2}$$

Onde sarà $x = 30$, $z = 70$, $y = 90$, come desideravasi di sapere.

Si può ancora sciorre il suddetto quesito nel seguente modo, ponendo le tre equazioni, come di sopra.

$$x + z = a$$
$$x + y = b$$
$$z + y = c$$

Si sommino insieme, come s' insegnò nell' antecedente Capitolo, e ne verrà la seguente equazione.

$$2x + 2z + 2y = a + b + c$$

Divisa per 2. $x + z + y = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$

Da quest' ultima equazione sottraggansi, come s' insegnò nell' antecedente Capitolo, le tre prime equazioni, ad una per una, lo che fatto si avranno noti i valori x, z, y, come vedesi nel seguente esempio.

$x+z+y = \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c$

Sottrasi $z+y = c$

Resta $x = \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c$

$x+z+y = \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c$

Sottrasi $x+y = b$

Resta $z = \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}b$

$x+z+y = \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c$

Sottrasi $x+z = a$

Resta $y = \frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}a$

Posto come sopra, $a = 100$, $b = 120$, $c 160$, dà come sopra $x = 30$, $z = 70$, $y = 90$.

QUESITO IV.

L'eredità di un Padre, distribuindosi ugualmente fra suoi figliuoli, e dando 800 scudi a ciaschedunо, ve ne sono 13 di più, se poi se ne dà 801, a ciascuno mancano due scudi. Cercasi il numero dei figliuoli, e quanta sia l'eredità.

Sia il numero dei figli $= x$, quando l'eredità sarà $800x+13$, la stessa secondo il prescritto dee essere $= 801x-2$, levato poi da ogni parte $800x$, ne viene $13 = x-2$, cioè $15 = x$, e tanti erano i figli, e l'eredità $= 800x+3$, cioè $= 12013$ scudi, come cercavasi.

Per sciorre il suddetto Problema in generale, suppongasi che distribuendo a ciascuno il numero a, vi sopravanzi c, ma distribuendo a ciascuno il numero e, vi manchi il numero f; onde sarà $ax+c = ex-f$, e fatta la trasposizione $f+c = ex-ax$, e dividendo per e-a, sarà $x = \frac{f+c}{e-a}$, dalla quale equazione si ha questa regola; la somma dell'eccesso del primo caso, e del difetto del secondo caso, dividasi per la differenza delle porzioni, che proviene da tutti due i casi, e sarà $\frac{f+c}{e-a} = x$, numero dei figli. Nel proposto caso 800, e 801, differiscono di un'unità, colla quale dividendo non s'altera la quantità che si divide; onde il numero dei figliuoli è $15 =$ all'aggregato di $13+2$, che erano nella prima, e seconda porzione per l'eccesso, e il difetto assegnato.

QUESITO V.

Morendo un Padre lasciò a suoi figli maschj, che erano tre più delle femine scudi 1350, alle femine scudi 600; la porzione che toccava a tre femine uguagliava quella di due maschj; Cercasi quanti maschj, e quante femine erano.

Denominansi per maggior facilità le quantità date colle lettere, e ponghansi da parte, come siegue.

Sca-

Scudi 1350 $=$ a
Scudi 600 $=$ b
Femine $=$ x
Maschj $=$ x+3
Porzione che tocca alli Maschj $= \frac{a}{x+3}$
Porzione che tocca alle Femine $= \frac{b}{x}$

$$\frac{3b}{x} = \frac{2a}{x+3}$$
$$3bx+9b = 2ax$$
$$9b = 2ax - 3bx$$
$$\frac{9b}{2a-3b} = x$$

Posti dunque i scudi 1350 $=$ a, i scudi 600 $=$ b, la quantità delle femine $=$ x, perciò i maschj saranno x+3, per dover essere 3 più delle femine. La porzione che tocca ai maschj sarà la quantità a, divisa pel numero d'essi, cioè $= \frac{a}{x+3}$, e parimenti la porzione che toccherà alle femine sarà la quantità b divisa pel numero di esse, cioè $= \frac{b}{x}$.

Ciò fatto, sarà la quantità che tocca a tre femine, cioè $\frac{3b}{x} = \frac{2a}{x+3}$, porzione che tocca a due maschj secondo il Quesito; moltiplicato il numeratore 2a, pel denominatore X, e il numeratore 3b, pel denominatore x+3 dà 3bx+9b $=$ 2ax, e per trasposizione 9b $=$ 2ax-3bx, diviso dunque 9b per 2a-3b ne viene $\frac{9b}{2a-3b} = X$.

Per trovar ciò in numeri, moltiplicasi b, cioè 600 per 9, che fa 5400, questo dividasi per 2a-3b, che essendo 2a $=$ 2700, ed il 3b $=$ 1800 dà 900. Con questo 900 dunque diviso il 5400 trovato di sopra da 6 $=$ x, numero delle femine, e perchè i maschj erano 3 più delle femine, dunque saranno 9, come cercavasi.

QUESITO VI.

Un Mulo, e un Asino portavano una quantità di misure di vino: l'Asino disse al Mulo, dammi una delle tue misure, che allora ne avremo un ugual quantità ciascheduno. Il Mulo rispose, dammi più tosto una delle tue misure, che allora io avrò doppio peso, che tu non hai. Cercasi quante misure portavano ciascheduno.

Sieno le misure dell'Asino $=$ x; onde presane una dal Mulo ne avrà x+1, ed al Mulo ne rimarrà x-1, nel qual caso sono ugualmente carichi, dunque alla prima ne aveva x+2, e se in tal stato ne prendeva una di più di quelle dell'Asino, allora ne avrebbe x+3, e l'Asino ne avrebbe x-1, e perchè in questo caso le misure del Mulo erano doppie delle misure dell'Asino, perciò ne verrà l'equazione x+3 $=$ 2x-2, levatovi l'x comune sarà 3 $=$ x-2, e per trasposizione 3+2 $=$ x, dunque 5 saranno le misure dell'Asino, e il Mulo che ne averà x+2, ne aveva dunque 7, come cercavasi.

Se per sciorre il suddetto Quesito si fossero prese due incognite, ponendo per le misure dell'Asino $=$ x, e per le misure del Mu-

lo $=$ y, farà secondo la prefcrizione $x+1 = y-1$, ed ancora $y+1 = 2x-2$. Nella prima equazione farà $x = y-2$, e nella feconda ponendo in luogo di x, y-2, farà $y+1 = 2y-4-2$, cioè $1 = y-6$, ovvero $7 = y$, dove fi vede che fempre, quando fi può, dee prenderfi una fola incognita, mentre l'altro valore dalla dipendenza che ha con la prefa incognita facilmente ritrovafi.

Il fuddetto Quefito fi fcioglie generalmente, ponendo che l'Afino prendi dal mulo un numero di mifure $= c$, nel qual cafo la ragione del pefo di ciafcheduno fia come 1, ad a. Nell'altro cafo poi prendi il Mulo, dall' Afino un numero di mifure $= e$, ed in quefto cafo la ragione del pefo di ciafcheduno fia come 1 ad f, nel qual modo procedendo farà nel primo cafo le mifure dell'Afino $x+c$, e quelle del Mulo $x-c$, farà dunque per l'ipotefi $x+c . y-c :: 1 . a$, fatta la moltiplicazione degli eftremi, e dei medj per averne l'equazione farà $ax+ac = y-c$, ovvero farà $ax+ac+c = y$. Nel fecondo cafo le mifure dell'Afino faranno $x-e$, quelle del Mulo $x+e$, dunque fecondo l'ipotefi farà $x-e . y+e :: 1 . f$, e fimilmente $fx-ef = y+e$, cioè $fx-ef-e = y$, cioè uguale ad $ax+ac+c$, che fi trovò di fopra, onde verrà $fx-ax = ac+c+ef+e$, finalmente poi $\frac{ac+c+ef+e}{f-a} = x$. Nel Quefito fi fuppofe a, c, e, uguali ciafcheduno ad 1, ed $f = 2$; onde $f-a = 1$, ed $ac+c+ef+e = 1+1+2+1 = 5$, come di fopra; di quì fi vede che variata la fuppofizione fi troveranno dalla fuddetta equazione gli altri valori.

QUESITO VII.

Molti Soldati erano difertati, ed arrivando ad una Città erano in tanti, che fe ve ne foffero ftati altrettanti, ed ancora 52 di più, non farebbero arrivati a 1245, ma ve ne farebbero mancati a 1245, quanti alla prima erano più di 187. Cercafi quanti Soldati erano.

$$52 = a \qquad 1245 = b \qquad 187 = c \qquad \text{Soldati} = x$$

$$2x+a = b-x+c$$

$$x = \frac{b+c-a}{3}$$

Poniamo, come fi vede fatto quì fopra, il $52 = a$, il $1245 = b$, il $187 = c$, e i Soldati cercati $= x$, il doppio di quefti Soldati x più 52, cioè $2x+a$, faranno uguali ai foldati 1245, quando da quefti li faranno levati quei tanti, che alla prima erano più di 187, onde effendo alla prima x, da quefti levati li 187, cioè c, ne rimarranno $x+c$, i quali levati dai 1245, cioè da b refteranno $b-x+c = 2x+a$, che poi operato al folito ne viene $x = \frac{b+c-a}{3}$, ed effendo $b = 1245$, $c = 187$, fanno 1432, da quali levato $a = 52$, reftano 1380, i quali divifi per 3 danno Soldati $460 = x$, come cercavafi.

QUE-

QUESITO VIII.

Pel Dazio di libre 360 di Seta, fu lasciato al Gabelliere libre 8 di essa, e vi restò dare lire 24: un' altra volta per libre 280 di altra simil Seta, fu lasciato a conto di Gabella libre 6, e vi restò dare lire 20. Cercasi quanto costi la libra, e quanto per libra pagò di Gabella.

Questo Quesito è lo stesso, che il Quesito VIII. dell' ultimo Capitolo della quinta parte della presente Aritmetica, posta nel secondo Tomo, nel qual luogo si fece vedere il modo di averne la soluzione coi numeri, e quì si fa vedere come si possa sciogliere coll' ajuto dell' Algebra.

libre $360 = a$	$a . b :: cx+e . dx+f$
libre $280 = b$	
libre $8 = c$	$adx+af = bcx+be$
libre $6 = d$	
lire $24 = e$	$af-be = bcx-adx$
lire $20 = f$	$x = \frac{af-be}{bc-ad}$

Gabella d' ogni libra $= x$

Pongasi, come si vede quì sopra le libre $360 = a$, le libre $280 = b$, le libre $8 = c$, le libre $6 = d$, le lire $24 = e$, le lire $20 = f$, ed x pongasi per quel tanto che paga di gabella ogni libra di Seta, ciò fatto dicasi, come stanno le libre 360, cioè a alle libre 8, cioè b, così starà quello che si pagò di gabella per le libre 360, a quello che si pagò di gabella per le libre 280; e perchè la prima volta, cioè per le libre a lasciò 8 libre di Seta, cioè c, a conto di gabella, la qual Seta abbiamo posto che paghi di gabella x, per ogni libra, dunque la gabella sarà la moltiplicazione di tal Seta, nella sua gabella, cioè cx, con di più lire 24, cioè e, che è il resto della gabella, parimenti per le libre 280, cioè b lasciò per la gabella libre 6 di Seta, cioè d, a conto di gabella, la qual Seta pagando x, per ogni libra, dunque la gabella sarà, come sopra la moltiplicazione di tal Seta, nella sua gabella, cioè dx, con di più lire 20, cioè f, che è il resto della gabella, onde la proporzione verrà così $a . b :: cx+e . dx+f$, come si vede di sopra, della quale moltiplicati gli estremi, e i medii si ha questa equazione $adx+af = bcx+be$, e separata x al solito ne viene $x = \frac{af-be}{bc-ad}$.

Moltiplicato dunque a, per f, cioè 360 per 20, e dal prodotto 7200, levato 6720 prodotto di b, in e, resta 480, il quale diviso per la differenza dei prodotti bc-ad, cioè di 280 in 8, e di 360 in 6, che è 80, dà di quoziente $6 = x$, dunque lire 6 costa la libra della Seta. Per saper poi quanto pagò di gabella per libra, ciò si avrà prendendo quello che pagò di gabella per una delle due partite di seta, dove si vede che per la prima partita pagò $cx+e$, ed essendo $x = 6$, $cx+e$ sarà lire 72, che pagò di gabel-

bella, per le libre 360, diviso dunque 72, per 360, il quoziente soldi 4, sarà quello, che pagava per libra di gabella la Seta. Lo stesso pure si sarebbe avuto, come da sè è chiaro, prendendo quello che pagò di gabella, per la seconda partita che fu $dx+f$, ed essendo $x = 6$, $dx+f$ sarà lire 56, che pagò di gabella per le libre 280, divise dunque le lire 56 per 280, dà come sopra soldi 4, per quello che pagava di gabella, ogni libra di Seta, come cercavasi.

QUESITO IX.

Partono nel medesimo tempo, dal medesimo luogo, due viandanti uno a cavallo dell' Asino, e l' altro a cavallo d'un Cavallo. Il Cavallo fa 10 miglia ogni giorno. L' Asino il primo giorno fa un miglio, il secondo due, il terzo tre, e così sempre crescendo ogni giorno un miglio; Cercasi in quanto tempo l' Asino arriverà il Cavallo.

numero dei giorni $= x$ $\qquad 10x = \frac{xx+x}{2}$

miglia del Cavallo $= 10x$ $\qquad 20x = xx+x$

miglia dell' Asino $= \frac{\overline{x \times x+1}}{2}$ $\qquad 20 = x+1$

$20 - 1$, cioè $19 = x$

Il suddetto Quesito è lo stesso, che quello posto nella parte sesta di questa Aritmetica al Capitolo III. del secondo Tomo. Posto dunque, come si vede quì sopra il numero dei giorni in cui l' Asino arriverà il Cavallo $= x$, le miglia del Cavallo che farà in tal tempo saranno il prodotto di 10 in x, cioè $10x$. Le miglia poi fatte dall' Asino saranno uguali alla somma di una progressione Aritmetica naturale, principiante dall'unità, e continuando per una quantità di termini uguale ad x, dunque tal somma secondo quello che s' insegnò nelle progressioni sarà $\frac{\overline{x+1 \times x}}{2}$, dunque sarà $10x = \frac{xx+x}{2}$, e separata x, come si vede di sopra, ne viene $x = 19$, per le miglia cercate, in cui l' Asino arriverà il Cavallo. In generale poi posto $10 = a$, sarà $ax = \frac{xx+x}{2}$, e separata x ne verrà $2a-1 = x$, ed essendo $a = 10$ sarà $2a-1 = 19$ miglia cercate, come sopra.

QUESITO X.

Morendo un Padre, lasciò eredi i suoi figliuoli di alcuni scudi. Al primo lasciò uno scudo più l' ottava parte del rimanente. Al secondo due scudi più l' ottava parte del rimanente. Al terzo tre scudi più l' ottava parte del rimanente, e così agli altri fuorchè all'ultimo, al quale lasciò quello che vi rimaneva: In questo caso si fa che la parte d' ogni uno era uguale. Cercasi quanti fossero i scudi, e quanti fossero i figliuoli.

Scu-

Scudi $= x$ | Fratelli $= y$

$$1^{\circ} = 1 + \frac{x-1}{8}$$

$$2^{\circ} = \frac{2 + x - 1 - \frac{x+1}{8} - 2}{8}$$

espurgato

$$\frac{2 + x - 3 - \frac{x+1}{8}}{8}$$

ridotto a semplice frazione

$$2 + \frac{x-3}{8} - \frac{x+1}{64}$$

dunque

$$1 + \frac{x-1}{8} = 2 + \frac{x-3}{8} - \frac{x+1}{64}$$

svanite le frazioni

$$4096 + 512x - 512 = 8192 + 512x - 1536 - 64x + 64$$

$$64x = 3136$$

$$\frac{3136}{64} = 49 = x$$

$$1 + \frac{x-1}{8} = \frac{x}{y}$$

$$8y + xy - y = 8x$$

$$\frac{8x}{8+x-1} = y$$

$$7 = y$$

Ponganfi tutti i fcudi $= x$, e il numero dei fratelli $= y$; il primo dunque avrà uno fcudo più l'ottava parte del rimanente, cioè $1 + \frac{x-1}{8}$, il fecondo avrà 2 fcudi più l'ottava parte del rimanente, il qual rimanente è x, da cui fieno levati i 2 fcudi di quefto fecondo, e la parte del primo, cioè $1x\frac{x-1}{8}$, che ogni cofa levata da x refta $x - 1 - \frac{x+1}{8} - 2$, che divifo per 8, per averne l'ottava parte del rimanente, e aggiuntovi li 2 fcudi, che dee avere dà $2 + \frac{x - 1 - \frac{x+1}{8} - 2}{8}$, parte che tocca al fecondo, la qual parte efpurgata, e ridotta dà $2 + \frac{x-3}{8} - \frac{x+1}{64}$, e perchè la parte di ciafcuno dee effere uguale, perciò ne verrà quefta equazione $1 + \frac{x-1}{8} = 2 + \frac{x-3}{8} - \frac{x+1}{64}$, dalla quale feparata l'incognita x, quefta farà uguale a 49, onde tanti faranno i fcudi, come vedefi operato di fopra.

Perchè ogni fratello dee avere una ugual porzione di fcudi, ne verrà dunque, che divifo il numero dei fcudi x, pel numero dei fratelli y, quefto farà uguale alla porzione che dee avere ciafcun fratello, onde ne verrà queft'equazione $1 + \frac{x-1}{8} = \frac{x}{y}$, che operato feparando y, ne viene $y = \frac{8x}{8+x+1}$, e perchè l'x l'abbiamo trovato $= 49$, dunque 8x farà 392, che divifo per 8+x-1, cioè per 56 dà $7 =$, y numero dei fratelli cercati, come fi vede operato di fopra.

La foluzione del fuddetto, o fimili quefiti fi ha con una regola generale, che è di prendere l'8 dell'ottavo, dal quale levata un' unità refta 7, e tanti faranno i fratelli; quadrato poi il detto 7 fa 49, e tanti faranno i fcudi. Se non foffe un'ottavo, ma verbigrazia un nono, fi leva l'unità dal 9, del nono, e refta 8, e tanti faranno i fratelli, fi quadra il detto 8, che refta, e fa 64, e tanti faranno i fcudi, e nello fteffo modo deefi generalmente intendere degli altri.

QUE-

QUESITO XI.

Cercasi quanto guadagneranno lire 30000 in anni 4, a ragione del 10 per cento a capo dell'anno.

Questo Quesito è simile al Quesito II. del Capitolo VII. della quinta parte della nostra Aritmetica, posto nel secondo Tomo, il qual Quesito coll'Algebra si sciorrà, come si vede quì sotto.

lire 30000 $= a$
10 per cento, cioè $\frac{10}{100}$, ovvero $\frac{1}{10} = n$
Guadagno $= x$

anni 1°. na
2°. $na + nna$
3°. $na + 2nna + n^3a$
4°. $na + 3nna + 3n^3a + n^4a$

$$x = 4na + 6nna + 4n^3a + n^4a$$

Ponghansi le lire $30000 = a$, il 10 per cento, cioè $\frac{10}{100}$, ovvero $\frac{1}{10} = n$, il guadagno $= x$. Ciò posto il guadagno del primo anno sarà $\frac{1}{10}$, cioè n, moltiplicato per 30000, cioè per a, e sarà na. Quello del secondo anno sarà il guadagno dello stesso Capitale a, aumentato dal guadagno na, del primo anno, onde sarà $na + nna$. Quello del terzo anno sarà il guadagno dello stesso primo Capitale a, aumentato dal guadagno na, del primo anno, e dal guadagno $na + nna$ del secondo, onde sarà $na + 2nna + n^3a$. Il guadagno del quarto anno sarà il guadagno dello stesso primo Capitale a, aumentato dal guadagno na del primo anno, e dal guadagno $na + nna$ del secondo, e dal guadagno $na + 2nna + n^3a$ del terzo, che sarà $na + 3nna + 3n^3a + n^4a$, e nello stesso modo si proseguirebbe se si cercasse il guadagno di più di quattro anni. Sommansi poi tutti i suddetti guadagni che fanno $4na + 6nna + 4n^3a + n^4a = x$ cioè uguali al guadagno che si cerca.

Preso dunque quattro volte na, cioè $\frac{1}{10}$ di 30000, più sei volte $\frac{1}{100}$ dello stesso 30000, cioè $6\,nna$, e quattro volte $\frac{1}{1000}$ dello stesso 30000, cioè $4n^3a$, e ancora $\frac{1}{10000}$ dello stesso 30000, cioè n^4a, che sommati insieme danno lire 13923, guadagno uguale ad x, cioè il guadagno cercato.

QUESITO XII.

Cercasi quante lire dovrannosi porre a frutto a capo d'anno, per anni 4, a ragione del 10 per cento, in modo che nel detto tempo guadagnino lire 13923.

Questo Quesito è simile al Quesito II. del Capitolo VIII. della quinta Parte della nostra Aritmetica, posto nel secondo Tomo, il quale si scioglie in generale, come si vede nel seguente esempio.

Ca-

Capitale $= x$
10 per cento, cioè $\frac{10}{100}$, ovvero $\frac{1}{10} = n$
guadagno lire $13923 = a$.

1°. nx
2°. $nx + nnx$
3°. $nx + 2nnx + n^3x$
4°. $nx + 3nnx + 3n^3x + n^4x$

$$a = 4nx + 6nnx + 4n^3x + n^4x$$

$$x = \frac{a}{4n + 6nn + 4n^3 + n^4}$$

Ponganſi il Capitale $= x$, il 10 per cento, cioè $\frac{10}{100}$, ovvero $\frac{1}{10} = n$, il guadagno lire $13923 = a$. Ciò poſto altro non deeſi fare che ſciorre il Queſito operando nello ſteſſiſſimo modo che ſi fece nel Queſito antecedente, altro non differendo queſto da quello, ſe non che quì il Capitale è incognito, dove nell'altro era cognito, e vicendevolmente quì il guadagno è cognito, e nell' altro era incognito, onde operato, come ſi vede di ſopra ne viene $x = \frac{a}{4n + 6nn + 4n^3 + n^4}$, preſo dunque 4n che è $\frac{4}{10}$, 6nn che è $\frac{6}{100}$, $4n^3$, che è $\frac{4}{1000}$, ed n^4, che è $\frac{1}{10000}$, e ſommati inſieme fanno $\frac{4641}{10000}$, con queſto numero diviſo a, cioè le lire 13923, come moſtra l'equazione, dà nel quoziente lire 30000 Capitale ricercato: nello ſteſſo modo, e maniera deeſi raziocinare per la ſoluzione di qualſivoglia altri Queſiti ſimili, o differenti dai propoſti.

CAPITOLO XVII.

Delle Equazioni quadratiche, e loro ſoluzioni.

Le Equazioni quadratiche, ovvero di ſecondo grado, ſono quelle, dove la quantità incognita ha due dimenſioni, onde $xx = ab$, $axx - cxx = mn$, $xx + ax = cd$, $xx + ax - bx = ad$ ec. saranno quadratiche, e le prime, cioè $xx = ab$, $axx - cxx = mn$ chiamanſi quadratiche pure, perchè l'incognita da per tutto è elevata alla ſteſſa dimenſione; le ſeconde, cioè $xx + ax = cd$, $xx + ax - bx = ad$, chiamanſi quadratiche affette, perchè l'incognita ha in eſſe diverſe poteſtà, come diceſi nel principio del Capitolo XIV. di queſta Parte.

Se l'equazione quadratica è pura, come $xx = cd$, eſtratta da ogni parte la ſeconda radice, o radice quadrata ſi avrà il cercato valore, cioè $x = \sqrt{cd}$. E per la ſteſſa ragione ſe $xx = 3600$, eſtratta la radice da ogni lato, ſarà $x = \sqrt{3600}$, e ſe ſi eſtrarrà la radice quadrata da 3600, nel modo che inſegna l'Aritmetica ſi averà $x = 60$. Così pure ſe ſarà $axx - cxx = mn$, ſi avrà $xx = \frac{mn}{a-c}$, onde eſtratta la radice ſarà $x = \sqrt{\frac{mn}{a-c}}$.

Se l'Equazione è affetta, come $xx + ax = bb$, il modo di trovare il valore dell'incognita x è queſto. Colla metà del coefficiente del ſecondo termine, cioè $\frac{1}{2}a$, ſi faccia un quadrato, che ſarà

$\frac{1}{4}aa$, queſto quadrato aggiungaſi ad ogni membro della Equazione, nel qual caſo dalla parte delle incognite ſi farà una poteſtà compita, la di cui radice ſi potrà eſtraere con facilità, come ſi vede operato quì ſotto.

$$xx + ax = bb$$

aggiungaſi $\frac{1}{4}aa$ $\frac{1}{4}aa$

dà $xx + ax + \frac{1}{4}aa = bb + \frac{1}{4}aa$

eſtratta la radice $x + \frac{1}{2}a = \sqrt{bb + \frac{1}{4}aa}$

ſicchè $x = \sqrt{bb + \frac{1}{4}aa} - \frac{1}{2}a$

Sia come ſi vede quì ſopra $xx+ax = bb$, ſi faccia colla metà del coefficiente del ſecondo termine, che è $\frac{1}{2}a$, il ſuo quadrato, che è $\frac{1}{4}aa$, il quale aggiunto da ogni lato dell'equazione dà $xx+ax+\frac{1}{4}aa = bb+\frac{1}{4}aa$, eſtratta poi la radice quadrata da tutti due i membri ſarà $x+\frac{1}{2}a = \sqrt{bb+\frac{1}{4}aa}$, e ſeparata l'incognita dà $x = \sqrt{bb+\frac{1}{4}aa} - \frac{1}{2}a$.

Lo ſteſſo pure ſi vede fatto nell'eſempio ſeguente.

$$xx - 3ax = cd$$

aggiungaſi $\frac{9}{4}aa$ $\frac{9}{4}aa$

dà $xx - 3ax + \frac{9}{4}aa = cd + \frac{9}{4}aa$

eſtratta la radice $x - \frac{3}{2}a = \sqrt{cd + \frac{9}{4}aa}$

ſicchè $x = \sqrt{cd + \frac{9}{4}aa} + \frac{3}{2}a$

Da quello ſi diſſe nelle radici, e nelle elevazioni del binomio al quadrato è chiaro, che per avere la radice quadrata del primo membro della equazione aggiunto, dal quadrato della metà del coefficiente del ſecondo termine deeſi prendere la ſomma, ovvero la differenza delle radici del primo, e terzo termine della potenza compita. Si prenderà la ſomma quando tutti i termini della poteſtà ſono poſitivi, come $x+\frac{1}{2}a$, nel primo eſempio; ſi prenderà poi la loro differenza, ſe il ſecondo termine della poteſtà è negativo, come nel ſecondo eſempio dove $x-\frac{3}{2}a$ è la ſua radice.

Quando accadeſſe, che l'Equazione quadratica aveſſe il ſecondo membro negativo, come $xx-ax = -b$; ed aggiuntovi da ogni parte il quadrato della metà del coefficiente ſarà $xx-ab+\frac{aa}{4} = -b+\frac{aa}{4}$, ed eſtratta la radice da ogni lato ne verrà $x = \sqrt{-b+\frac{aa}{4}}+\frac{a}{2}$, queſta ne è una ſoluzione, un'altra ſarà mutando il ſegno ad $\frac{a}{2}$, così $x = \sqrt{-b+\frac{aa}{4}}-\frac{a}{2}$, nel qual caſo fuori delle ſuddette due ſoluzioni altre non ve ne poſſono eſſere, quando però non vi foſſero tali circoſtanze nel Problema, che diverſamente lo faceſſero eſſere.

Se

Se poi un'equazione quadratica affetta avrà più coefficienti che moltiplichino la quantità incognita semplice: come $xx+ax+3bx-cx = mn$, allora si prendino tutti i coefficienti che moltiplicano l'incognita semplice, cioè $a+3b-c$, e si facciano uguali ad un'altra quantità cognita, la quale sarà o positiva, o negativa, secondo che c è minore, o maggiore di $a+3b$ (la qual cosa non succede, come da se è chiaro, quando tutti i suddetti coefficienti avessero un medesimo segno, mentre se avessero tutti $+$, o tutti $-$ sarebbero tutti assieme, o positivi, o negativi, secondo che lo fossero i suoi segni); onde per esprimere in generale tutti due i suddetti casi si farà $a+3b-c = \pm d$, cioè uguale a più, o meno d, secondo che lo sarà, lo che fatto avremo l'Equazione quadratica ordinaria $xx \pm dx = mn$, sopra la quale operaro nel modo insegnato di sopra ne verrà $xx \pm dx + \frac{1}{4}dd = mn + \frac{1}{4}dd$, ed estratta la radice da ogni lato ne verrà $x \pm \frac{1}{2}d = \sqrt{mn + \frac{1}{4}dd}$, e trasportata l'$x$ da se sola sarà $x = \sqrt{mn + \frac{1}{4}dd} \pm \frac{1}{2}d$.

CAPITOLO XVIII.

Soluzioni d'alcuni Quesiti attinenti alle Equazioni quadratiche affette.

QUESITO I.

Ritrovare un numero quadrato, al quale aggiunta la sua radice venga uguale all'unità.

Sia la radice del ricercato numero quadrato $= x$, sarà per la condizione del Problema la seguente Equazione.

$$xx + x = 1$$

aggiunto $\frac{1}{4}$ $\quad \frac{1}{4}$

dà $xx + x + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

estratta la radice $x + \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{5}{4}}$

dunque $x = \sqrt{\frac{5}{4}} - \frac{1}{2}$

Dalla suddetta Equazione cavasi $x = \sqrt{\frac{5}{4}} - \frac{1}{2}$, che per essere irrazionale non si può esprimere che nel suddetto modo.

QUESITO II.

Ritrovare due numeri, la di cui somma levata dalla somma dei suoi quadrati, rimanga 78; e aggiunta la somma dei detti numeri alla moltiplicazione di essi numeri faccia 39.

Sia la somma dei dati numeri $= 2x$, la di loro differenza $= 2y$ sarà il maggiore $= x+y$, il minore $= x \quad y$, e posto $b = 39$ sarà $2b = 78$.

La ragione che $x+y$ sia il maggiore, ed $x-y$, il minore, è perchè di due quantità inuguali è maggiore l'aggregato della mezza

 som-

somma, e della mezza differenza di esse, della differenza fra la mezza somma, e la mezza differenza delle stesse quantità: onde diviso 12 in due parti inuguali verbigrazia 8, e 4, la loro mezza differenza è 2. Dunque è maggiore $6+2$, e minore $6-2$.

Posta dunque la somma di due quantità, come nel nostro caso $=2x$, e la differenza di esse $=2y$ sarà $x+y$ la parte maggiore, ed $x-y$, la parte minore, perchè la mezza somma è x, e la mezza differenza è y, onde sarà come abbiamo posto di sopra la parte maggiore $x+y$, e la minore $x-y$.

Si facciano dunque i suoi quadrati, e dalla loro somma $2x^2+2y^2$ levasi la somma dei numeri $2x$, sarà per la prima condizione del Problema la seguente equazione.

$$2x^2+2y^2-2x=2b$$

divisa per 2 dà $x^2+y^2-x=b$

Se poi alla moltiplicazione dei detti due numeri, che è x^2-y^2 se gli aggiungerà la loro somma $2x$, ne proverrà per la seconda condizione del Problema un'altra equazione, che è la seguente.

$$x^2-y^2+2x=b$$

aggiuntavi l'equazione di sopra. $x^2+y^2-x=b$

sarà $2x^2+1x=2b$

divisa per 2 dà $x^2+\frac{1}{2}x=b$

La suddetta ultima equazione finale, che è quadratica, si scioglierà nel modo già insegnato, come si vede qui sotto, che ne viene $x=\sqrt{b+\frac{1}{16}}-\frac{1}{4}$.

$$xx+\tfrac{1}{2}x=b$$
$$xx+\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{16}=b+\tfrac{1}{16}$$
$$x+\tfrac{1}{4}=\sqrt{b+\tfrac{1}{16}}$$
$$x=\sqrt{b+\tfrac{1}{16}}-\tfrac{1}{4}$$

Preso dunque b, cioè $39+\frac{1}{16}$ fa $\frac{625}{16}$, la di cui radice è $6\frac{1}{4}$, da questa levato $\frac{1}{4}$ dà $6=x$. Per trovar poi il valore di y, ciò si ha dalla prima equazione $x^2+y^2-x=b$, dalla quale cavasi, che $y^2=b-x^2+x$, dunque preso b, cioè $39-x^2$, il quale x^2 è 36 dà 3, al quale aggiunto x, cioè 6 da $9=y^2$, estratta la radice da 9 ne viene $3=y$; onde il numero maggiore dei cercati sarà $x+y=9$, e il minore $x-y=3$, come cercavasi.

QUESITO III.

Due Mercanti fecero una Società. Il primo non si sà qual Capitale vi ponesse, solo si sà, che stette 12 mesi nella Società. L'altro vi pose 30 scudi, e stette nella Società mesi 17. Il guadagno che fecero fu di scudi $18\frac{3}{4}$. Il primo ebbe fra Capitale, e guadagno scudi 26. Cercasi quanto Capitale pose il primo nella Società?

Sie-

Sieno i ſcudi poſti dal primo $= x$, il tempo, cioè li meſi $12 = a$: li ſcudi poſti dall'altro, cioè $30 = b$, li meſi $17 = c$; il prodotto dei ſcudi poſti dal primo, col ſuo tempo ſarà $= ax$; il prodotto dei ſcudi, poſti dal ſecondo, col ſuo tempo ſarà $= bc$, e queſti prodotti aſſieme uniti ſono $= ax + bc$: il guadagno ſcudi $18\frac{3}{4} = d$. Il Capitale del primo, col ſuo guadagno, cioè $26 = f$. Per conoſcere il guadagno del primo ſi faccia $ax + bc . d :: ax$ ad un quarto proporzionale, il quale ſi ha operando nel modo dell' ordinaria Aritmetica, cioè moltiplicando il terzo pel ſecondo, e il prodotto dividerlo pel primo; onde ne viene $\frac{adx}{ax + bc}$, il quale è il guadagno del primo, ſe a queſto guadagno ſe gli aggiungerà il ſuo capitale, che vi poſe, ſi avrà la ſeguente equazione.

$$x + \frac{adx}{ax + bc} = f$$

La ſuddetta equazione moltiplicata per $ax + bc$, per far ſvanire la frazione ſarà

$$axx + bcx + adx = afx + bcf$$

traſportate le incognite ſarà $axx + bcx + adx - afx = bcf$
poſti poi i numeri, che competono alle lettere a, b, c, ed f, ſarà $12xx + 423x = 13260$
diviſo per 12, ſarà $xx + 35\frac{1}{4}x = 1105$

Separata poi l'x nella maniera già inſegnata, ſi ritroverà la detta $x = 20$, per i ſcudi poſti di capitale dal primo Mercante, come cercavaſi.

Si ſarebbe ancora potuto ſervire delle lettere ſino alla fine della ſoluzione, ſenza porvi i numeri nel modo che ſi vede quì ſotto.

la ſuddetta equazione $axx + bcx + adx - afx = bcf$
per levare l'a al axx ſi divida per
a, e ne viene ——— $xx + \frac{bc}{a}x + \frac{ad}{a}x - \frac{f}{a}x = \frac{bcf}{a}$
pongaſi i coefficienti che
moltiplicano x, cioè $\frac{bc}{a} + \frac{d}{a} - \frac{f}{a} = \pm e$, ſarà $xx \pm ex + \frac{ee}{4} = \sqrt{\frac{bcf}{a} + \frac{ee}{4}}$.

e conſeguentemente $x = \sqrt{\frac{bcf}{a} + \frac{ee}{a}} \pm \frac{e}{2}$

dato poi il valore alle lettere che le competono, ed eſtrattane la radice, cioè fatto tutto ciò che moſtra l'equazione finale, ne verrà come ſopra $x = 20$, numero cercato.

QUESITO IV.

Interrogato un Peſcatore quanto Peſce aveſſe preſo, riſpoſe; Ho preſe 12 libre di Anguille, ed ancora alcune libre di Luzi, che non sò quanto; ben sò che peſati, e quante libre ſono, tanti ſoldi voglio vendere ciaſcheduna libra sì dei Luzi, che delle Anguille, nel qual caſo caverei 133 ſoldi. Cercaſi quante ſono le libre dei Luzi, e qual ſia il prezzo che vuol vendere ogni libra.

Sieno le libre dei Luzi $= x$, onde tutto il peſce ſarà libre $12 + x$, che vendute ciaſcheduna al prezzo $= x$, ſi avranno ſol-

di

di $12x+xx$, dunque sarà $xx+12x = 133$. Ovvero posto $12 = a$; $133 = b$, si farà l'equazione $xx+ax = b$, dunque secondo il fin' ora detto sarà $x = \sqrt{b+\frac{aa}{4}}-\frac{a}{2}$, ed essendo $\frac{12}{2} = 6$, il di cui quadrato $= 36$, sarà $x = \sqrt{133+36}-6$, cioè $x = \sqrt{169}-6$, ed essendo $\sqrt{169} = 13$, da questo 13 levato il 6 resta 7, dunque erano 7 libre di Luzi, e per ogni libra voleva venderli 7 soldi, come cercavasi.

Si sarebbe avuta la soluzione in particolare, aggiungendo alla equazione $xx+12x = 133$, il quadrato della metà del coefficiente 12, da ogni parte che è 36, quadrato di $\frac{12}{2}$, cioè di 6, facendo $xx+12+36 = 169$, ed estratte le radici ne viene $x+6 = 13$; onde $x = 13-6 = 7$, come sopra.

QUESITO V.

Un Capitano aveva disposto il suo Esercito in un quadro perfetto, e le Artiglierie nemiche tre intiere fila ne uccisero, e il rimanente dei Soldati erano 550. Cercasi quanti erano nel principio?

Supponiamo che tutti i Soldati fossero xx, il quale è numero quadrato che ha la sua radice x, dunque levatene tre fila della lunghezza di x, ne rimarranno $xx-3x$, che saranno uguali ai soldati rimasti, dunque sarà $xx-3x = 550$. Posto $3 = a$, $550 = b$ sarà $x = \sqrt{b+\frac{aa}{4}}+\frac{a}{2}$, prendasi $\frac{a}{2}$, cioè $\frac{3}{2}$, il di cui quadrato $\frac{aa}{4}$, cioè $\frac{9}{4}$, al quale aggiungasi b, cioè 550, ovvero $\frac{2200}{4}$, e questo per ridurre ogni cosa ad una stessa denominazione, e ne verrà la somma $\frac{2209}{4}$, la di cui radice è $\frac{47}{2}$, alla quale aggiunto $\frac{a}{2}$, cioè $\frac{3}{2}$ fa $\frac{50}{2}$, cioè $25 = x$; onde xx, numero dei Soldati dell'intiero Campo quadrato erano 625, e i Soldati morti 75, che compongono 3 fila della detta lunghezza di 25 uomini, i quali 75 Soldati perduti levati da tutto l'esercito 675, ne restano 550; come cercavasi. In particolare si sarebbe avuto lo stesso aggiungendo da ogni parte dell'equazione $xx-3x = 550$, il quadrato della metà del coefficiente 3, la qual metà è $\frac{3}{2}$, e il suo quadrato $\frac{9}{4}$, onde sarebbe $xx-3x+\frac{9}{4} = 550+\frac{9}{4} = \frac{2209}{4}$, ed estratta la radice da ogni parte ne viene $x-\frac{3}{2} = \frac{47}{2}$, ovvero $x = \frac{50}{2} = 25$, come sopra.

QUESITO VI.

Una Persona lascia seminare in un suo Campo 30 Corbe di grano ad un Contadino, con questa condizione, che per la sua fatica tante Corbe abbia del raccolto, quanto ne rende il seme, secondo il numero del frutto che ne provenirà. Cioè se il seme si quintuplicherà, debba avere il frutto di 5 Corbe, se sestuplicherà debba avere il frutto di 6 Corbe ec. Lo che fatto, il Padrone ebbe Corbe 216 di grano. Cercasi il frutto di qualsivoglia Corba, e quanta fu la parte del Contadino?

Ponia-

Poniamo il frutto di qualsivoglia Corba di seme $= x$, dunque il frutto di 30 Corbe sarà $30x$, il Contadino ne ebbe dunque Corbe xx, che è il frutto di una Corba di seme secondo il numero x, dunque il Padrone ne ha Corbe $30x - xx = 216$, secondo l'ipotesi, posto $30 = a$, ed il $216 = b$ sarà $- xx + ax = b$, e mutati i segni acciocchè xx venga positivo fa $xx - ax = - b$, presa dunque la metà del coefficiente del secondo termine, cioè $\frac{a}{2}$, che è 15, e il suo quadrato $\frac{aa}{4}$, che è 225, aggiunto ad ogni parte dell'equazione ne viene $xx - ax + \frac{aa}{4} = - b + \frac{aa}{4}$, ed estratta la radice da ogni lato dell'equazione ne viene $x = \sqrt{-b + \frac{aa}{4}} + \frac{a}{2}$, e perchè b è 216, levato questo da $\frac{aa}{4}$, che è 225, resta 9, la di cui radice è 3, alla quale aggiunto $\frac{a}{2}$, cioè 15 dà $18 = x$. Questo caso ha due soluzioni, come dicemmo nel Capitolo XVII., una delle quali è la suddetta, cioè di aggiungere alla radice 3 il 15, come mostra l'equazione di sopra, e l'altra è di levare da 15, il 3, e ne rimarrà 12, onde $12 = x$, perciò le due soluzioni saranno $x = 18$, ed $x = 12$, e tutti due questi casi verificano la condizione del Problema, imperocchè se il frutto sarà 18, dunque 30 Corbe renderanno Corbe 540, dalle quali detratto il frutto di Corbe 18, per il Contadino, che sono 324, ne rimane 216 per il Padrone. Se poi posto il frutto 12, dunque 30 Corbe renderanno 360, dalle quali detratto il frutto di Corbe 12, per il Contadino che sono 144, al Padrone ne restano Corbe 216, secondo le prescritte condizioni del Problema; nè altre soluzioni, fuori delle suddette due, in simili circostanze possono soddisfare. In particolare poi si scioglierà la suddetta equazione $30x - xx = 216$, mutando come dicemmo i segni, acciocchè xx venga positivo, sarà $xx - 30x = - 216$. Aggiungasi 225 quadrata di 15 metà di 30, e sarà $xx - 30x + 225 = 225 - 216 = 9$, ed estratte le radici sarà $x - 15 = 3$, onde sarà $x = 18$, come sopra, oppure $15 - x = 3$, cioè $x = 12$, come pure dicemmo di sopra.

QUESITO VII.

Un Mercante comprò due rotoli di Panno, uno bianco, e l'altro rosso, e n'ebbe fra tutto 80 braccia; pagò il rosso una lira più del bianco, e tanto il bianco, quanto il rosso valeva lire 198. Cercasi il valore del braccio sì del bianco, che del rosso, e quanto n'ebbe per sorta.

lire 198 $= a$ | $\frac{ax}{x}$, cioè $a = \frac{ba-ax}{x} + b - x$
braccia 80 $= b$ | $ax = ba - ax + bx - xx$
braccia del Panno bianco $= x$ | $xx + 2ax - bx = ba$
braccia del Panno rosso $= b-x$ | $xx \pm cx + \frac{cc}{4} = ba + \frac{cc}{4}$
valore del brac. del bianco $= \frac{a}{x}$ | $x = \sqrt{ba + \frac{cc}{4}} \mp \frac{c}{2}$
valore del brac. del rosso $= \frac{a}{x} + 1$

$2a - b = \pm c$

Poste, come si vede quì sopra, le lire 198 $= a$, le braccia 80 $= b$, le braccia del Panno bianco $= x$, dunque quelle del rosso saranno il rimanente per andare in 80, cioè in b, onde le braccia del Panno rosso saranno $= b - x$, il valore del braccio del Panno bianco saranno le lire 198, divise per tutte le braccia di esso panno, dunque il valore del braccio del Panno bianco sarà $= \frac{a}{x}$, il valore del braccio del Panno rosso sarà lo stesso $\frac{a}{x}$, più una lira secondo la condizione del Problema; onde il valore del braccio del Panno rosso sarà $= \frac{a}{x} + 1$.

Ciò posto si avrà il valore del Panno bianco, moltiplicando la sua quantità x, nel valore del braccio $\frac{a}{x}$, che sarà $\frac{ax}{x}$, cioè a, il valore del Panno rosso si avrà medesimamente, moltiplicando la sua quantità $b-x$, nel valore del braccio $\frac{a}{x} + 1$, che sarà $\frac{ba-ax}{x} + b - x$, i quai due valori secondo la condizione del Problema deono essere uguali; onde si averà questa equazione $a = \frac{ba-ax}{x} + b - x$, e svanita la frazione, dà $ax = ba - ax + bx - xx$, trasportato poi l'xx, per farlo venire positivo si avrà $xx + 2ax - bx = ba$, posto poi $2a - b = \pm c$ ne avremo l'equazione finale $x = \sqrt{ba + \frac{cc}{4}} \mp \frac{c}{2}$, come si vede di sopra.

Presi dunque i numeri corrispondenti a, $ba + \frac{cc}{4}$, ed estrattane la radice, e ad essa aggiunto, o levato $\frac{c}{2}$, secondo che $2a-b$ è quantità positiva, o negativa dà $x = 44$, dunque il Panno bianco era 44 braccia, e il rosso sarà il rimanente, per giungere a 80, cioè 36 braccia, divise poi le lire 198, per le braccia 44 da lire 4: 10; valore del braccio del Panno bianco, dunque il braccio del Panno rosso costerà lire 5: 10, cioè una lira più del bianco, secondo la condizione del Problema, come cercavasi.

QUESITO VIII.

Da un vaso pieno, nel quale vi sia una misura d'acqua cognita, e il rimanente vino, di questo misto levatane una misura uguale all'acqua che v'era alla prima, e per esso ripostavi altrettant' acqua, si vuole che il vino, e l'acqua sieno in quantità uguali. Cercasi di qual capacità dee essere un tal vaso?

Mi-

Misura d'acqua $= a$

Vino $= x$

Acqua che trovasi nella misura di misto, che levasi $= y$

$a . x :: y . \frac{xy}{a}$

$y + \frac{xy}{a} = a$

$ay + xy = aa$

$y = \frac{aa}{a+x}$

$2a - \frac{aa}{x+a}$

$4a - \frac{2aa}{x+a} = x + a$

cioè $3a = x + \frac{2aa}{x+a}$

$3ax + 3aa = xx + ax + 2aa$

$xx - 2ax = aa$

$xx - 2ax + aa = 2aa$

$x = \sqrt{2aa} - a$

Si ha la soluzione del suddetto Problema, che si vede fatta di sopra in questo modo. Posta la misura cognita dell' acqua $= a$, la quantità del vino $= x$, e la porzione d'acqua che trovasi nella misura di misto che levasi $= y$; si vede chiaro, che così stà l'acqua a al vino x, che trovasi nel vaso, come la parte y dell' acqua, che levasi al vino che pure allora si leverà, e trovato il quarto proporzionale questo è $\frac{xy}{a}$, parte del vino levato, questa parte di vino $\frac{xy}{a} + y$, cioè più la parte dell'acqua che levasi è uguale alla misura del misto, che levasi dal vaso, come è chiaro, onde sarà $y + \frac{xy}{a} = a$, e separato il y dà $y = \frac{aa}{x+a}$, se dunque dall' acqua a leveremo $\frac{aa}{x+a}$, che è lo stesso che y, ne resterà $a - \frac{aa}{x+a}$, uguale all'acqua che resta nel vaso dopo levata la misura di misto, e perchè a quest' acqua se ne aggiunge un' altra misura, cioè a, tutta l'acqua che sarà in ultimo nel vaso sarà $2a - \frac{aa}{x+a}$, la quale raddoppiata fa $4a - \frac{2aa}{x+a}$, che sarà uguale a tutta la capacità del vaso, perchè dee contenere secondo la condizione del Problema un ugual quantità d'acqua, e di vino, e perchè sappiamo essere la capacità del vaso $x+a$, dunque $4a - \frac{2aa}{x+a} = x+a$, ridotta poi l'equazione dà $xx - 2ax = aa$, alla quale aggiuntovi, per esser quadratica, da ogni lato il quadrato della metà di $2a$, che è aa dà $xx - 2ax + aa = 2aa$, dai membri della quale estrattane la radice, e trasportato ciò che deesi trasportare secondo le regole insegnate ne viene $x = \sqrt{2aa} - a$. Posto dunque che a sia uguale ad una Corba, cioè $a = 1$ sarà $x = \sqrt{2} - 1$, che è irrazionale, perciò non si potrà sapere in numeri che per approssimazione.

CAPITOLO XIX.

Dei Problemi indeterminati.

Quando nei proposti Problemi dalle sue condizioni non si può dedurre tante equazioni, quante sono le incognite prese, allora il Problema si chiama *indeterminato*, perchè ammette non una sola, ma più soluzioni anzi indefinite, o inassegnabili. Nei quali casi una o più delle incognite si può assegnare a nostro arbitrio, purchè la natura del Problema non repugni a tal particolare supposizione. Come per esempio, se si cercassero due numeri, il di cui prodotto sia uguale, verbigrazia a 12. Sieno questi x uno, e y l'altro, per le condizioni del Problema una sola equazione si può

avere, cioè $xy = 12$; onde $y = \frac{12}{x}$; prendasi dunque ad arbitrio $x = 2$, sarà $y = \frac{12}{2} = 6$. Se si prenderà $x = 3$ sarà $y = \frac{12}{3} = 4$. Se si prenderà $x = 4$, sarà $y = \frac{12}{4} = 3$ ec. Si vede però che il numero, il quale si prende ad arbitrio, dee essere minore di 12, perchè altrimenti un numero maggiore od uguale al 12 repugnerebbe alla natura del Problema: e perchè un numero qualunque si può dividere in una quantità indefinita di parti, perciò il suddetto Problema ammetterà indefinite soluzioni.

Vi sono ancora dei Problemi indeterminati, nei quali trovansi bensì tante equazioni quante sono le incognite, ma poi maneggiate queste a dovere non è possibile avere la incognita uguale a quantità cognite, nel qual caso l'incognita, che si vorrebbe svanire, e che trovasi in un membro dell'equazione, si prenderà per l'indeterminata, e con questa poi mediante le altre equazioni si averà il valore delle altre cognite, come si vede nella soluzione del Quesito ultimo del seguente Capitolo.

Dalle suddette cose si conosce, che gli altri Problemi, i quali chiamansi *determinati*, non possono ammettere che una sola soluzione. Come per esempio, se fosse dato da trovare due numeri, la di cui somma sia 100, e la loro differenza 30, dunque posto il maggiore di essi $= x$, e il minore $= y$ sarà $x + y = 100$, ed $x - y = 30$, e sostituendo in vece di x la sua $= 100 - y$, sarà $100 - 2y = 30$; onde $\frac{100 - 30}{2}$, cioè $35 = y$, e conseguentemente $x = 65$; dunque il numero maggiore è 65, e il minore 35, onde si vede, che i suddetti numeri, che come ignoti si cercavano, divengono non solo cogniti, ma talmente determinati, che è impossibile, che il maggiore sia diverso da 65, e il minore diverso da 35, e perciò veruna altra quantità potrà mai soddisfare alle condizioni poste in questo Problema.

Si danno altri Problemi, i quali hanno un numero determinato di soluzioni, nel qual caso tai Problemi vengon detti *limitati*, per esser il numero delle loro soluzioni assegnabile, e limitato. Come per esempio se si dicesse, si vuol pagare una somma di 100 lire, colle seguenti monete, cioè Ducati da lire 3 l'uno, Genovine da lire 7. Ungari da lire 10: Cercasi quante monete delle suddette si devon pagare per sorta? Un tal Problema si conosce essere limitato, mentre le monete dovendo essere tutte intiere secondo la condizion del Problema, si vede chiaro, che sono limitate a un tal numero intiero di esse, il di cui valore appunto sia lire 100; onde il suddetto caso amette 18 soluzioni, le quali si vedono nell'esempio seguente.

Du-

Soluzioni.	Ducati da lire 3.	Genovine da lire 7.	Ungari da lire 10.
1ª	1	1	9
2	1	11	2
3	2	2	8
4	2	11	1
5	3	3	7
6	4	4	6
7	5	5	5
8	6	6	4
9	7	7	3
10	8	8	2
11	9	9	1
12	11	1	6
13	12	2	5
14	13	3	4
15	14	4	3
16	15	5	2
17	16	6	1
18	21	1	3

Quando un Problema è tale, che le condizioni che lo esprimono lo rendono repugnante alle sue stesse condizioni, tai Problemi chiamansi *immaginarj*. Come per esempio, se nel Quesito VII. del Capitolo XVI. di questa Parte si fosse posto $c = 601$, ne verrebbero i Soldati cercati $= 624$, il di cui doppio 1248 passa il 1245, quando che secondo la dimanda aggiuntovi ancora 52 non devono giungere a 1245; ma ne devono mancare tanti, quanti alla prima erano più di 601; come il Problema richiede, dalla qual cosa si conosce, che il Problema è stato proposto immaginariamente.

Accade ancora alcuna volta nel sciorre i Problemi, che nell' equazione finale svanisce ogni cosa, venendo verbigrazia $2x+a=2x+a$, cioè, $o=o$. Questi casi vengono chiamati *identici*, e nascono dall' avere prese bensì proporzioni vere, e ben calcolate, ma non contenenti le proprietà del Problema. Passeremo ora a mostrare nel seguente Capitolo la soluzione d'alcuni Problemi indeterminati, come siegue.

CAPITOLO XX.

Soluzioni d'alcuni Quesiti indeterminati.

QUESITO I.

DUE Mercanti hanno guadagnato in un Negozio tanto per ciascheduno, che la somma dei loro guadagni è tre volte quanto la differenza di essi. Cercasi il guadagno di ciascheduno.

$$x+y \,.\, x-y :: a \,.\, b$$
$$ax-ay=bx+by$$
$$ax-bx=by+ay$$
$$x=\frac{by+ay}{a-b}$$

Posto; come si vede di sopra il guadagno di uno $=x$, e quello dell' altro $=y$, $3=a$, $b=1$, sarà dunque per la condi-

zione del Problema $x+y . x-y :: a . b$, ed operato ne viene $x = \frac{by+ay}{a-b}$, e perchè niun'altra equazione si può avere dalle condizioni del Problema, perciò tal dimanda sarà indeterminata. Prendiamo dunque ad arbitrio $y = 2$, $a = 3$, $b = 1$, sarà $x = \frac{6+2}{2} = \frac{8}{2} = 4$, onde $4+2 . 4-2 :: 3 . 1$. cioè $6 . 2 :: 3 . 1$.

Prendiamo ora $y = 6$, sarà $x = \frac{6+18}{2} = \frac{24}{2} = 12$, onde sarà $12+6 . 12-6 :: 3 . 1$. cioè $18 . 12 :: 3 . 1$. ec.

QUESITO II.

Ritrovare due numeri, la di cui somma stia alla somma dei loro quadrati in una data ragione.

L'uno dei numeri cercati sia $= x$, l'altro $= xy$, e la ragione data sia di a, al b, dunque sarà per la condizion del Problema, come siegue.

$$x+xy : xx+xxyy :: a : b$$
$$bx+bxy = axx+axxyy$$
divisoper x sarà $$b+by = ax+axyy$$
$$x = \frac{b+by}{a+ayy}$$

E perchè ancor quì dalle condizioni del Problema non si può avere altra equazione, questo sarà indeterminato. Poniamo dunque $a = 3$, $b = 1$, e prendiamo ad arbitrio, $y = 2$ sarà $x = \frac{1+2}{3+12} = \frac{1}{5}$, ed $x+xy = \frac{3}{5}$, ed $xx+xxyy = \frac{5}{25} = \frac{1}{25}$, onde $\frac{3}{5} . \frac{1}{5} :: 3 . 1$.

Prendasi $a = 2$, $b = 1$, e prendasi $y = 3$, sarà $x = \frac{1+3}{2+18} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$, $x+xy = \frac{4}{5}$, ed $xx+xxyy = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$, perciò sarà $\frac{4}{5} . \frac{2}{5} :: 2 . 1$. ec.

Deesi avvertire che per l'altro numero dei cercati non si è preso semplicemente y, ma xy, e questo, perchè tutta l'equazione moltiplicata per x esisti, e di quì si possa avere il comun divisore, acciocchè fatta la divisione questi quadrati si riducano a una sola dimensione, lo che in simili casi dee avvertirsi.

QUESITO III.

Vi sono tre Cassette, in ciascheduna delle quali vi sono una quantità di lire, e per fare che in ciascheduna di esse vi fosse un' ugual valore, dalla prima di esse si sono levate lire 800, e poste nella terza; da questa terza così aggiunta se ne è levata la sua terza parte, e aggiunta alla seconda, lo che fatto trovossi in ciascheduna Cassetta un ugual quantità di lire. Cercasi quante lire erano alla prima in ciascheduna Cassetta.

lire 800 $= a$ $x-a = \frac{2z+2a}{3} = \frac{z+a}{3} + y$

prima Cassetta $= x$

seconda $= y$ $x-a = \frac{2z+2a}{3}$ $x-a = \frac{z+a}{3} + y$ $\frac{2z+2a}{3} = \frac{z+a}{3} + y$

terza $= z$ $\frac{3x-5a}{2} = z$ $3x-4a-3y = z$ $z = 3y-a$

$\frac{3x-5a}{2} = 3x-4a-3y$ $\frac{3x-5a}{2} = 3y-a$ $3x-4a-3y = 3y-a$

$y = \frac{x-a}{2}$ $y = \frac{x-a}{2}$ $y = \frac{x-a}{2}$

Po-

Posto dunque, come si vede di sopra le lire $800 = a$, le lire della prima Cassetta $= x$, quelle della seconda $= y$, e quelle della terza $= z$. Si avrà per le condizioni del Problema $x - a$, quello che resta nella prima Cassetta; aggiunta alla terza la stessa a, questa diverrà $z + a$, dalla quale levatone la terza parte resterà $\frac{2z+2a}{3}$, aggiunta poi la terza parte del suddetto $z+a$, cioè $\frac{z+a}{3}$ alla seconda sarà $\frac{z+a}{3} + y$, e queste tre quantità secondo le condizioni del Problema deono essere uguali; onde sarà $x - a = \frac{2z+2a}{3} = \frac{z+a}{3} + y$, paragonati poi i suddetti tre valori a due a due si avranno queste tre equazioni $x - a = \frac{2z+2a}{3}$; $x - a = \frac{z+a}{3} + y$; $\frac{2z+2a}{3} = \frac{z+a}{3} + y$, dalle quali equazioni separate da ogn' una l' incognita z, ne verrà dalla prima equazione $\frac{3x-5a}{2} = z$, dalla seconda $3x - 4a - 3y = z$, e dalla terza $3y - a = z$, paragonati finalmente questi tre valori uguali, si hanno le tre equazioni $\frac{3x-5a}{2} = 3x - 4a - 3y$, $\frac{3x-5a}{2} = 3y - a$, $3x - 4a - 3y = 3y - a$, dalle quali tre equazioni cavansi in ciascuna $y = \frac{x-a}{2}$; onde perchè l' incognita y non resta uguale a quantità tutte cognite, si dirà che il Problema è indeterminato.

Prendasi dunque pel valore di x un numero arbitrario, purchè non repugni alle condizioni del Problema, e perchè si è trovato di sopra $\frac{3x-5a}{2} = z$, bisognerà dunque che la quantità, la quale assegneremo al x, sia tale, che dal suo triplo vi si possa levare $5a$, cioè 4000, e una tal quantità potrà essere da $1333\frac{1}{3}$ esclusive; onde porremo verbigrazia, $x = 1334$. Il valore poi di z sarà $\frac{3x-5a}{2} = z$, il quale si ha dalla suddetta equazione, perciò sarà $z = 1$. Il valore di y sarà, come si cava dalle suddette equazioni $y = \frac{x-a}{2}$; onde sarà $y = 267$.

Se poi vogliamo prendere y per l' indeterminata, si prenda dalle suddette equazioni $z = 3y - a$, dato poi alla lettera y un valore arbitrario, purchè non ripugni alle condizioni del Problema, e per essere la suddetta equazione $z = 3y - a$, bisognerà prendere per y un numero, il di cui triplo sia maggiore di a, cioè di 800, il qual numero potrà essere da $266\frac{2}{3}$ esclusive in là: posto dunque $y = 267$, ed essendo $3y - a = z$ sarà $z = 1$ e perchè da una equazione posta di sopra è $\frac{3x-5a}{2} = z$, separata da questa equazione l' x sarà $x = \frac{2z+5a}{3}$, cioè $x = 1334$, come sopra.

Se poi finalmente vogliamo prendere z, per l' indeterminata, si separi dalla equazione $\frac{3x-5a}{2} = z$ trovata di sopra l' x, e ne verrà $x = \frac{2z+5a}{3}$, e dato a z un valore arbitrario, purchè non repugni alle condizioni del Problema, onde per essere nella suddetta equazione $x = \frac{2z+5a}{3}$, si vede che z può essere qualunque cosa fuorchè zero, onde dal zero esclusive in là, qualunque numero che si prenda, potrà essere il valore di z: posta dunque $z = 1$,

ed

ed essendo $x = \frac{2z+5a}{3}$ sarà $x = 1334$, ed essendo $y = \frac{x-2}{3}$, sarà $y = 267$, come sopra, nel qual modo resta sciolto il suddetto Problema, dalla qual soluzione si vede che può avere infinite soluzioni, principiando dalle suddette quantità, e andando avanti in infinito.

Chi desidera maggior quantità di Quesiti indeterminati, ricorra a Diofanto Alessandrino, che ne dà moltissimi, mentre a me basta aver posti i suddetti per istruire i principianti, e particolarmente il nostro Aritmetico nei principj dell'Algebra, mentre se desidera di passar più oltre, dovrà ricorrere a quegli Autori che di questa Scienza hanno trattato appieno.

DELL'

DELL' ARITMETICA DI GIUSEPPE ALBERTI

PARTE NONA.

IL Trattato delle Permutazioni, e combinazioni pare, che dovesse esser posto avanti del Trattato d'Algebra antecedente, come in fatti lo dovrebbe essere, ma perchè gli Autori, che abbiamo tradotti, per formar questa Parte, cioè il Tacquet, e il Martino, hanno saggiamente adoperate le lettere, perciò ho stimato dovere, porlo dopo di esso, acciocchè ciò venga disposto con metodo, e non arrivi ignoto, e non intelligibile un tal modo di operare al nostro Aritmetico.

CAPITOLO PRIMO.

Delle Combinazioni, e Permutazioni del Padre Tacquet ridotto nell' Italiana Favella.

QUantunque le voci *Combinazione*, *e permutazione* possansi promiscuamente intendere, tuttavia quivi ho stabilito distinguerle nel seguente modo: Supponiamo un certo numero di cose, come sarebbe a dire, dieci lettere; se cercasi quante unioni di esse lettere possansi avere a due a due, da queste dieci lettere, e quante a tre a tre, e così delle altre, dirassi allora cercarsi tutte le diverse *Combinazioni* delle dieci lettere, delle quali cadauna sempre deve essere risultante di un numero minore di quello che è stato proposto, e niuna delle quali due volte contiene la medesima, e niuna medesimamente ha tutte le medesime cose con alcun' altre; Se cercasi poi quante volte possano meschiarsi assieme le dette dieci lettere, sicchè sempre si prendano tutte cangiato unicamente l'ordine, allora cercheransi tutte le *Permutazioni* delle dieci lettere.

PROBLEMA I.

Dato un numero di cose, ritrovare tutte le Combinazioni.

Supponiamo 8 lettere, cioè a, b, c, d, e, f, g, h; Si combini la prima a, con tutte le altre che seguono dopo essa, voglio dire con b, c, d, e, f, g, h, e ne avremo da tal combinazione sette combinazioni diverse a due a due, cioè ab, ac, ad, ae, af, ag, ah. Si combini la seconda, cioè b colle seguenti, cioè c, d, e, f, g, h, e così delle altre, e avransi tutte le diverse unioni delle cose a due a due, che possono aversi dal dato numero di lettere.

Se poi si viene alla combinazione di tutte quante le unioni di-

ver-

verſe a due a due già fatte, con cadauna delle lettere che ſieguono dopo dette unioni, ſi avranno tutte le diverſe unioni a tre a tre, che poſſono farſi dal dato numero di lettere; ſi combini la prima unione a due a due fatta, cioè a b con tutte le lettere che ſieguono dopo eſſa, cioè c, d, e, f, g, h, ne avremo queſte unioni a tre a tre abc, abd, abe, abf, abg, abh; medeſimamente ſi prenda qualſivoglia altra unione a due a due, cioè cf, le lettere ſuſſeguenti a queſta ſono gh, perciò darà queſte unioni a tre a tre cfg, cfh, e non di più.

Combinazioni delle 8 Lettere.

Binarj, o Ambi diverſi 28.
ab, ac, ad, ae, af, ag, ah,
bc, bd, be, bf, bg, bh,
cd, ce, cf, cg, ch,
de, df, dg, dh,
ef, eg, eh,
fg, fh,
gh,

Ternarj, o Terni diverſi 56
abc, abd, abe, abf, abg, abh,
acd, ace, acf, acg, ach,
ade, adf, adg, adh,
aef, aeg, aeh,
afg, afh,
agh,
bcd, bce, bcf, bcg, bch,
bde, bdf, bdg, bdh,
bef, beg, beh,
bfg, bfh,
bgh,
cde, cdf, cdg, cdh,
cef, ceg, ceh,
cfg, cfh,
cgh,
def, deg, deh
dfg, dfh,
dgh,
efg, efh,
egh,
fgh,

Quadernarj, o quaderne diverſe 70
abcd, abce, abcf, abcg, abch,
abde, abdf, abdg, abdh,
abef, abeg, abeh,
abfg, abfh,
abgh,
acde, acdf, acdg, acdh,
acef, aceg, aceh,
acfg, acfh,
acgh,
adef, adeg, adeh,
adfg, adfh,
adgh,
aefg, aefh,
aegh,
afgh,
bcde, bcdf, bcdg, bcdh,
bcef, bceg, bceh,
bcfg, bcfh,
bcgh,
bdef, bdeg, bdeh,
bdfg, bdfh,
bdgh,
befg, befh,
begh,
bfgh,
cdef, cdeg, cdeh,
cdfg, cdfh,
cdgh,
cefg, cefh,
cegh,
cfgh,
defg, defh;
degh,
dfgh,
efgh,

Se

Se indi tutte le unioni a tre a tre si combinano colle lettere susseguenti, ne verranno tutte le unioni diverse, e possibili a quattro a quattro, e così delle altre.

La ragione di questo modo d' operare è per se stessa bastevolmente palese; nondimeno per piena intelligenza di tutto quanto il metodo osservasi.

Primieramente se da un dato numero di cose si prendano due numeri che assieme compongano lo stesso dato numero, le loro combinazioni saranno di ugual quantità. Supponghansi otto lettere, e da queste prendasi la prima, e la settima, che assieme sommate fanno 8, si potranno da 8 prendere 8 diverse unità, e perciò ancora 8 diverse unioni di lettere a 7 a 7.

Di nuovo dalle 8 lettere prendasi la seconda, e la sesta, che assieme fanno 8; col metodo già insegnato dalle otto lettere hannosi 28 diverse combinazioni di lettere a due a due, e perciò altrettante saranno ancora le combinazioni diverse a sei a sei; prendasi ancora la terza, e la quinta, che assieme unite fanno 8; perchè le combinazioni diverse a tre a tre trovansi essere 56, altrettante ancora saranno le diverse combinazioni a 5 a 5, lo che è chiaro a chi ben lo considera.

Osservasi in secondo luogo quanto più i numeri, secondo i quali si fa la combinazione, s'accostano da ogni parte verso il mezzo, tanto maggiori sono le combinazioni, onde dalle date otto lettere si hanno più unioni diverse a due a due, ed a sei a sei, che unità, e unione a 7 a 7; così si hanno più diverse unioni a tre a tre, e a 5, a 5, che a due a due, e a sei a sei.

Osservasi in terzo luogo, quando il numero dato delle cose è uguale, allora la sua metà darà il numero massimo delle combinazioni, come quando si dà il numero di otto lettere, se le lettere si combinino a quattro a quattro, si averà il massimo numero delle combinazioni.

Quando però il numero delle cose che si dà sia impari, allora i due numeri contigui, la cui somma fa il dato numero delle cose, danno il massimo numero della combinazione; come se diansi 9 lettere, i numeri contigui, la cui somma fa 9, sono 4, e 5, e se le lettere si combinino a quattro a quattro, o a 5 a 5, si avrà il numero massimo della combinazione.

Ma perchè dal metodo di sopra insegnato non può rilevarsi il numero delle combinazioni, se cadauna non si mostri, quivi unisco una regola, tolta da Pietro Erigonio, in virtù della quale si vien facilmente a tal notizia.

	3	8
	2	7
a. 8. 7. 6.	6	56
b. 3. 2. 1.	1	6
	6	336
		56

Supponiamo un numero di cose, cioè a, che è 8, ed un altro minore, cioè b, che è 3, secondo il quale si abbiano da combinare le cose date.

S' instituiscono due progressioni Aritmetiche, col levare una unità dalli numeri dati a, b, di tanti termini, quante unità ha il minor numero b; allora il numero 336, prodotto della moltiplicazione dei termini della maggior progressione, si divida pel numero *6*, prodotto della moltiplicazione dei termini della minor progressione, ed il quoziente 56 sarà il ricercato numero delle combinazioni, che può aversi, se le cose date si combinino, secondo il numero b.

Che se bramasi sapere in quante combinazioni, ciascune cose si ritroveranno, moltiplicasi la quantità delle combinazioni, per il numero, secondo il quale le cose sono state combinate, ed il prodotto partasi pel numero dato delle cose, mentre il quoziente mostrerà in quante combinazioni ritrovasi cadauna delle cose.

Mi son valso, per esempio di tutte queste cose, delle otto lettere a, b, c, d, e, f, g, h, da queste si hanno 28 diversi binarj, o ambi, 56 diversi ternarj, o terni, 70 quatternarj, o quaderne, 56 quinarj, o cinquine, 28 senarj, o sestine, 8 settenarj, o settine, che corrispondono ad altrettante diverse unità, come i senarj ai binarj, i quinarj ai ternarj; quivi sonosi solamente espressi i soli binarj, ternarj, e quatternarj, gli altri facilmente ritrovansi coll'uso della medesim' Arte, pertanto le otto lettere, a, b, c, d, e, f, g, h, danno 246 combinazioni. Nel seguente Problema si vedrà delle permutazioni.

PROBLEMA II.

Dato un numero, trovare tutte le permutazioni possibili.

Supponiamo dieci lettere, cioè a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, fa d'uopo mostrare tutti gli ordini diversi, e possibili delle dette dieci lettere.

Deesi prima sapere, che il modo di trovare il numero delle permutazioni di quante cose si vogliono, si ha col moltiplicare insieme i numeri che esprimono la serie di dette cose, come se fossero date le 5 *lettere A, B, C, D, E, cioè numerate, coi numeri sono* 1, 2, 3, 4, 5, *moltiplicati questi numeri fra di loro, danno* 120, *numero delle permutazioni che si possono fare colle dette lettere A, B, C, D, E. La qual cosa viene insegnata dallo stesso Tacquet, nello scolio della Proposizione XIX. Libro VII. della sua Aritmetica, mediante la qual regola ha formata la seguente Tabella delle permutazioni.*

Nu-

Numero delle cose.	Permutazioni.
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5040
8	40320
9	362880
10	3628800
24	620448401733239439360000.

Che se nel dato numero delle cose occorrono alcune simili, oppure che sieno le medesime, come se si dia questa parola *Ignatius* d'otto lettere, nella quale si vede due volte l'i, si troverà il numero delle permutazioni, con questa regola tolta dal nostro Kirchero.

Il numero delle permutazioni si divida per il numero delle permutazioni, che possono avere le cose simili, che il quoziente sarà quello che si cerca.

Le otto Lettere di questa parola *Ignatius*, se tutte fossero diverse, darebbero 40320 permutazioni; le lettere simili sono due, e due lettere ammettono due permutazioni, perciò dividasi per 2 il 40320, il quoziente sarà 20160, e questo sarà il numero di tutti gli ordini diversi, e possibili delle otto lettere che formano la parola *Ignatius*.

COROLLARIO.

I. Dieci Uomini possono sedere ad una mensa più di tre milioni di volte, sicchè mai sia il medesimo l'ordine dei sedenti a tal mensa, mentre di dieci cose gli ordini diversi sono 3628800.

II. Mille milioni di Scrittori in mille milioni d'anni non possono scrivere tutte le permutazioni delle 24 lettere dell'Alfabeto; quantunque ogn'uno di questi Scrittori giornalmente riempisse quaranta pagine, delle quali cadauna contenesse quaranta diversi ordini delle 24 lettere.

Le cose dette, brevemente si dimostrano, mentre uno Scrittore in un giorno scrive 40 pagine, delle quali ogni una contenga quaranta ordini diversi; moltiplicasi il 40, per 40, si hanno 1600 diversi ordini che un solo Scrittore in un giorno scriverà; se diamo che l'anno sia di 366 giorni, un solo scrittore scriverà in un anno 585600 ordini, oppure permutazioni delle 24 lettere, che è il prodotto risultante dal moltiplicare 1600 per 366. Adunque in 1000000000 anni uno Scrittore solo scriverà 585600000000000, perchè questo numero si ha dalla moltiplica-

zione 585600, per 1000000000; onde se in mille milioni d' anni un sol Scrittore scriva le permutazioni, o gli ordini diversi 585600000000000, mille milioni di Scrittori, nel medesimo tempo, cioè in mille milioni d'anni scriveranno tante permutazioni, diverse delle 24 lettere, quante si hanno dalla moltiplicazione di mille milioni, per il detto numero 585600000000000, e il numero delle permutazioni da questa moltiplicazione provenuto sarà 585600000000000000000000, che è minore di 620448401733239439360000, numero che mostra tutte le permutazioni delle 24 lettere dell'Alfabetto.

III. Dal medesimo Problema si ritroveranno tutti i possibili anagrammi d'un dato nome; e se alcune lettere nel dato nome occorrono che sieno le medesime, sarà d'uopo appigliarsi ancora alla regola di sopra insegnata.

IV. Per avere tutti i Vocaboli che possonsi fare dalle 24 lettere dell'Alfabetto, sarà necessario mostrare per mezzo del primo Problema tutte le combinazioni delle 24 lettere, sì a due a due, a tre a tre, a quattro a quattro, a cinque a cinque, a sei a sei ec. e parimente tutte le combinazioni rigorosamente, delle quali si tratta nel primo Problema, che non solo sono fra se diverse, ma nelle quali ancora non occorra alcuna lettera due volte che sia la medesima, dipoi tutte quelle permutazioni, nelle quali una lettera, o più lettere s'affacciano, il ritrovar le quali bastantemente si fa chiaro dalle prime combinazioni; Indi come nel secondo Problema di ciascheduna combinazione le lettere si dovranno diversamente permutare tante volte, quanto si può, e da tutte quelle tanto combinazioni, quanto permutazioni avrassi un numero di parole grandissimo, e quasi immenso, ma però sempre determinato.

OPU-

OPUSCOLO

DELLE COMBINAZIONI, E' DELLE PERMUTAZIONI,

DEL SIG. NICCOLO' DI MARTINO,

Ridotto nell' Italiana Favella.

HO sempre stimato non potersi da alcuno negare l'utilità della Dottrina delle permutazioni, tanto nella ricerca, e scoprimento degli Arcani della Natura, quanto nell' uso della Vita civile. Perchè non penso, che alcuno vi sia, il quale non sappia che infinite sono le variazioni, tanto della Natura nelle sue opere, quanto degli Uomini nelle loro azioni, la qual variazione da altro non conosce il suo essere, che dalla diversa permutazione, e combinazione delle parti.

E' molto difficile il ridire tutte le maniere, per le quali più cose possono mutarsi, o combinarsi assieme, allorchè concorrano a produrre qualche effetto. Onde non è meraviglia, se il difetto più famigliare, nel quale gli Uomini anche più prudenti sogliono incorrere, non sia altro appunto, che l' imperfetta numerazione delle parti. Pertanto si dovrà giudicare utilissima quella Dottrina, che toglie simil difetto, e insegna di numerare tutti i modi, nei quali si possono più cose assieme permutare, e combinare. Ciò posto, stimo, che non sarà picciolo pregio dell'Opera da farsi, se questa Dottrina delle permutazioni, e delle combinazioni leggiermente dal Padre Tacquet toccata, da me si esponga più diffusamente in questo Opuscolo, in grazia dei principianti.

CAPITOLO I.

Delle Permutazioni.

DUE o più cose diconsi fra loro permutarsi, quando meschiansi assieme, in modo tale che venga, bensì mutato l'ordine, e il luogo fra di loro, ma però non siegua mutazione alcuna nella moltitudine di esse. Per la qual ragione si dirà, cercarsi di due, o più cose tutte le permutazioni, che si possono avere, allora quando si cerca quante volte possono assieme meschiarsi talmente, che non lasciandovene nè aggiungendovene alcuna, vengasi in cognizione del loro cangiamento, circa l' ordine, o il luogo.

Se due cose diverse si vorranno permutare, ne risulteranno due, e diverse permutazioni, e se di queste due cose l' una sia verbigrazia a, che vada avanti, e dopo ne siegue l'altra, cioè b, questa sarà una permutazione; un' altra permutazione sarà se preceda b, e ne siegua a. Se le cose da permutarsi sieno tre, e diverse come a, b, c, subito che una di queste tiene il primo luogo, le altre due possono permutarsi due volte, e perciò due vol-

te

te tre permutazioni occorreranno di quelle tre diverse cose, e vale lo stesso che dire si avranno sei diverse permutazioni; Così può intendersi se le cose saranno quattro, cioè a, b, c, d, mentre se una di queste terrà il primo luogo, le altre tre sono soggette a sei permutazioni, o variazioni d'ordine, onde resta chiaro che tutte le diverse permutazioni delle suddette cose saranno quattro volte sei, cioè 24. Adunque generalmente il numero delle diverse permutazioni, alle quali possono esser soggette più cose diverse, tante volte conterrà il numero delle permutazioni, che possono avere le stesse cose meno una, quante sono le unità dello stesso numero delle cose.

Poste le cose dette, sarà facile ritrovare il numero di tutte le permutazioni diverse, mentre il numero delle permutazioni che possono avere più cose, tante volte capirà il numero delle permutazioni a cui sono soggette le stesse cose meno una, quante sono le unità dello stesso numero delle cose, onde posto un numero di cose, se questo numero si moltiplicherà per il numero delle permutazioni, che possono avere le date cose meno una, si avrà subito il numero delle permutazioni che si cercava; onde due cose diverse, due sole permutazioni possono avere, e per avere il numero delle permutazioni di più cose, verbigrazia di tre, si moltiplicherà 2 per 3. E così parimente si dovranno moltiplicare fra di loro vicendevolmente 2. 3. 4, per avere il numero delle permutazioni di quattro cose diverse, laonde se tutti i numeri levatane l'unità seguiranno uno dopo l'altro, con l'ordine naturale, fino al numero inclusive delle cose da permutarsi, si moltiplicheranno per se stessi vicendevolmente, il prodotto che risulterà da tali moltiplicazioni, sarà il cercato numero delle permutazioni di tutte le date cose.

Posto poi, che nel dato numero delle cose da permutarsi occorrano alcune cose simili, o anche le medesime due, tre, o più volte, allora il numero delle permutazioni sarà molto minore: questo numero facilmente si troverà, se si attenderanno i principj insegnati, e posti di sopra, mentre quando più cose sono simili, o le stesse, non possono queste fra di loro permutarsi, che una sol volta, essendo che le diverse permutazioni che ne seguirebbero per la loro similitudine, sarebbero nulle. Quindi quando in un dato numero di cose sonovi più cose simili, o le medesime, si avrà il numero di tutte le loro diverse permutazioni, dividendo il numero delle permutazioni che può avere il dato numero di cose intese, come se fossero tutte diverse, pel numero delle permutazioni, che possono farsi dalle cose simili considerate, come se fossero dissimili. Onde se supporremo il dato numero di cose essere 5, nel quale v'entri tre volte una medesima cosa, il numero delle diverse permutazioni sarà 20, perchè se si dividerà 120, numero di

di tutte le permutazioni per 6, numero delle permutazioni, che possono farsi delle tre cose simili, che in esse cinque cose si comprendono, il quoziente sarà 20, numero delle ricercate permutazioni.

Che se non una, ma due, o più cose nel dato numero di cose frequentemente occorra, allora si avrà il numero di tutte le permutazioni diverse, se si dividerà il numero delle permutazioni che risulta dal dato numero delle cose intese, come se tutte fossero diverse, per lo prodotto che verrà dai numeri delle permutazioni, che verrebbe dalle cose simili, che frequentemente occorrono, secondo la propria moltitudine di cadauna. Per lo che se fossero 7 le cose da permutarsi, e fra queste ve ne fosse una, che si presentasse due volte, e un'altra tre, il numero di tutte le permutazioni diverse sarà 420. La ragione di ciò è, che 7 cose possono permutarsi fra di loro 5040 volte in diverse maniere, e secondo l'accennato, perchè due cose possono permutarsi due volte, e tre, sei volte fra di loro, diviso dunque il numero 5040, per 12, il qual 12 è il prodotto di 6 in 2, darà il quoziente 420, numero delle ricercate permutazioni.

CAPITOLO II.

Delle Combinazioni, secondo tutti gli esponenti.

PER nome di *Combinazioni* s'intendono le congiunzioni delle cose, nelle quali in niun conto osservasi l'ordine, oppure il luogo delle cose, bensì si considera il numero, nel quale le cose proposte hannosi da congiungere insieme. Per lo che allora si cercheranno tutte le combinazioni diverse di più cose proposte, quando si cerca dal dato numero delle cose quante di esse a due a due, a tre a tre, a quattro a quattro possono aversi, sicchè cadauna d'esse una sol volta, e non più si prenda. 4

Il numero, secondo il quale le cose proposte si uniscono, si chiama *esponente della combinazione*, come se le cose si prendano a due a due, il loro esponente sarà 2, se a tre a tre il 3, se a quattro a quattro il 4, e così delle altre; e le cose unite secondo questi esponenti si dicono *binarj*, *o ambi*, *ternarj*, *o terni*, *quaternarj*, *o quaderne*, ovvero unione di due cose, di tre, di quattro ec. e per conseguenza si deono chiamare *ad una ad una*, quando le cose si prendono tutte ad una ad una, e *a nissuna a nissuna*, quando niuna affatto non se ne prende. 5

Prima che passiamo a trattare circa il ritrovamento delle combinazioni, secondo qualsivoglia dato esponente daremo un metodo per trovare le combinazioni, secondo tutti gli esponenti unitamente, lo che riuscirà comodo, se si osserverà il quì sotto modo. Sieno da combinarsi in tutte le maniere, le lettere a, b, c, d, si facciano tante serie, quante sono le lettere, in tal modo che nella prima serie si trovi la sola lettera a, nella seconda b sola,

e poi

e poi unita colla stessa a, nella terza si ponga da sè in primo luogo c, indi unisćasi c, con tutti i termini precedenti, nella quarta si collochi parimente da se sola d, e di poi unita con tutti i termini delle precedenti serie, e così delle altre,

a

b. ab

a. ac. bc. abc

d. ad. bd. cd. abd. acd. bcd. abcd.

Secondo l'ordine dato è chiaro, che le proposte lettere vicendevolmente si combinano assieme in qualunque modo, e secondo tutti gli esponenti, perchè la lettera che conduce tutte le altre di qualunque serie, si pone primieramente sola, dippoi accompagnata con tutti i termini delle precedenti serie. E' manifesto ancora, che in qualsivoglia serie si ritrova un termine di più dei termini tutti assieme, delle antecedenti serie, perciò i termini delle dette serie formeranno una progressione geometrica dupla, cominciante dall' unità. E secondo quello che ha dimostrato il Padre Tacquet, nel decimoquinto Teorema delle progressioni geometriche (*e noi nel secondo Tomo n°. XV.*) esser tale ancora la natura della progressione geometrica dupla, cominciante unità, che la somma di tutti i termini con una unità di più mostra il seguente termine.

In conseguenza dalle cose dette, riuscirà facile sommare assieme tutti i termini di quelle serie, e perciò trovare le combinazioni delle cose date, secondo tutti unitamente gli esponenti; La ragione si è, perchè quei termini formando una progressione geometrica dupla, principiante dall' unità, e quante sono le unità nel dato numero delle cose, altrettante essendo le serie dei medesimi termini, nella progressione dupla cominciante dall' unità, sarà bastante raccogliere assieme tanti termini, quante sono le unità nel dato numero delle cose, ed allora altrettanti termini della progressione geometrica dupla si sommeranno assieme, principiando dall' unità, se si prenda il termine susseguente della medesima progressione, e dal medesimo termine si levi un' unità, per questa proprietà, appunto poco fa accennata, che nella progressione geometrica dupla, cominciante dall' unità, la somma dei termini quanti sono accresciuta di un' unità, mostra il seguente termine.

E perchè nella progression geometrica dupla, cominciante dall' unità ogni termine trovasi, se il numero binario, cioè 2, tante volte si moltiplichi per se stesso, quanti sono i termini che vanno avanti al termine susseguente che si vuol trovare, si avrà questo termine susseguente, col moltiplicare il numero 2, tante volte per se stesso, quanti sono i termini precedenti, cioè quante sono le unità del dato numero delle cose. La regola dunque di ritrova-

va-

vare tutte le combinazioni, secondo tutti unitamente gli esponenti sarà la seguente:

Si moltiplichi il numero 2, tante volte per se stesso, quante sono le unità, le quali contiene il dato numero delle cose, e dal prodotto di questa moltiplicazione levisi un'unità, e il residuo sarà il numero delle combinazioni che si cerca. Onde se chiameremo n il numero delle cose date, il numero di tutte le combinazioni secondo tutti unitamente gli esponenti sarà $2^n - 1$, intendendo per 2^n, quella potestà del numero 2, la quale mostra il numero n.

CAPITOLO III.

Delle Combinazioni secondo ciascbedun esponente.

DOpo di avere insegnata la strada di trovare le combinazioni secondo tutti unitamente gli esponenti, rimane a vedere qual via tener si deggia, per ritrovare le Combinazioni, secondo cadauno degli esponenti: Ateso lo stesso ordine, del quale ci siamo valsi di sopra per ritrovare le Combinazioni, secondo tutti unitamente gli esponenti è chiaro, che la lettera, la quale è capo di qualunque serie, unita che sia alle cose ad una ad una delle precedenti serie, forma le cose a due a due, cioè gli ambi, unita agli ambi fa le cose a tre a tre, cioè i terni, unita ai terni fa le cose a quattro a quattro, cioè le quaderne, e così delle altre; onde in qualsivoglia serie il numero delle Combinazioni, secondo qualsivoglia dato esponente sarà, detrattane un'unità, uguale al numero delle combinazioni, secondo l'esponente, le quali si ritrovano nelle precedenti serie.

Posto ciò sarà dipoi facile fare una Tavola, la quale ci faccia vedere occularmente le Combinazioni, secondo cadauno esponente, le quali si ritrovano in qualunque serie. E perchè le cose ad una ad una si ritrovano in qualunque serie, pertanto in qualunque serie nel luogo delle dette cose ad una ad una si dovrà porre la stessa unità. E perchè nella prima serie, fuori delle sole cose ad una, ad una non vi sono alcune altre combinazioni, perciò gli altri spacj vacui si dovranno riempire di zeri; raccolte poi per ordine tutte le cose ad una, ad una delle serie precedenti, si ritroverà nella seconda serie esservi un ambo, nella terza due, nella quarta tre, e così delle altre. Parimente uniti gli ambi si troverà, che nella seconda non v'è alcun terno, nella terza esservene uno, nella quarta tre, nella quinta sei, nella sesta dieci ec. nel medesimo modo uniti i terni, si vedrà che tanto nella seconda, quanto nella terza serie non v'è alcuna quaderna, bensì nella quarta serie esservene una, quattro nella quinta, dieci nella sesta, e venti nella settima ec., e nel medesimo modo, e maniera si potranno successivamente ritrovare tutte le combinazioni di qualsivoglia serie.

Tavola della Combinazioni, secondo ciaschedun esponente.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0
4	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0
5	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0
6	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0
7	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0
8	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0
9	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0
10	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

Ora sarà d'uopo considerare le tre proprietà della suddetta Tavola, delle quali la prima è quella, in vigor della quale si construisce, e forma la Tavola stessa, e col cui ajuto senza alcuna difficoltà la medesima Tavola può continuarsi in infinito, voglio dire, che qualunque termine in qualsivoglia colonna verticale uguaglia la somma di tutti i superiori della precedente colonna verticale, dal che ne avviene, che per ritrovare qualunque termine desiderato in qualunque colonna verticale, esser bastante sommare assieme tutti i termini superiori, che si trovano nella precedente colonna verticale.

La seconda proprietà è, che la prima delle colonne verticali non ha alcun zero in principio, bensì la seconda ne ha uno, la terza due, la quarta tre, e così delle altre; onde se si prenda ugual quantità di termini in dette colonne, la quantità dei quali sia espressa per la lettera a; la quantità dei termini significativi, posti da parte i zeri, sarà a, nella prima colonna, a-1 nella seconda, a-2 nella terza, a-3 nella quarta, e così delle altre.

La terza proprietà è questa, che in qualsivoglia colonna verti-

ca-

cale, ſe qualche termine ſignificativo venga moltiplicato pel numero dei termini ſignificativi, che lo precedono, e il prodotto ſi divida pel numero di quella colonna, cioè per 1 nella prima colonna, per 2 nella ſeconda, per 3 nella terza ec., il quoziente ſarà la ſomma dei termini precedenti ſignificativi, onde ſarà ora facile ſommare aſſieme tutti quanti i termini di qualunque colonna verticale.

Si prenda in qualunque colonna verticale, cominciando dal primo termine, una ugual quantità di termini, la di cui quantità ſia denotata per la lettera a, ed atteſa la ſeconda proprietà, la quantità dei termini ſignificativi, nella prima colonna ſarà a, nella ſeconda a-1, nella terza a-2, nella quarta a-3 ec., e perchè nella prima colonna qualunque termine è l'unità, la lettera a, ovvero $\frac{a}{1}$ denoterà, non ſolo la quantità, ma ancora la ſomma dei termini ſignificativi.

Quindi perchè a cagione della prima proprietà $\frac{a}{1}$ è il termine, il quale nella ſeconda colonna immediatamente ſiegue, perciò ſe $\frac{a}{1}$ ſi moltiplicherà per a-1, e il prodotto ſi divida per 2, ſecondo la terza proprietà, il quoziente $\frac{a.\ a-1}{1.\ \ 2}$ ſarà la ſomma dei termini nella ſeconda colonna, ed eſſendo queſta ſomma il termine che proſſimamente ſiegue nella terza colonna, ſe la medeſima ſomma ſi moltiplicherà per a-2, e dividaſi per 3, il quoziente $\frac{a.\ a-1.\ a-2}{1.\ \ 2.\ \ 3}$ ſarà la ſomma dei termini nella terza colonna, e così parimente la medeſima ſomma dei termini ſarà $\frac{a.\ a-1.\ a-2.\ a-3}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ 4}$ nella quarta colonna, $\frac{a.\ a-1.\ a-2.\ a-3.\ a-4}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ 4.\ \ 5}$ nella quinta colonna, e così in infinito, oſſervandoſi però, che i punti frappoſti alle quantità denotano la continua moltiplicazione delle medeſime quantità.

E' chiaro dunque, che queſta ſomma ſi moſtra con due progreſſioni Aritmetiche, una che diſcende dalla quantità dei termini, collo ſminuimento d'una quantità, l'altra che aſcende dalla unità, collo accreſcimento d'una unità, e l'una, e l'altra è compoſta di tanti termini, quante unità contiene il numero della colonna.

Onde la medeſima ſomma denotandoci tutte le Combinazioni, le quali ſi formano da altrettante coſe, quanti ſono i termini preſi, e ſecondo quell'eſponente che denota, e ci dimoſtra il numero della colonna, ne avviene di conſeguenza, che per ritrovare tutte le combinazioni che poſſonſi fare da più coſe, ſecondo qualſivoglia dato eſponente, ſarà di meſtieri attenerſi alla quì ſottopoſta Regola.

Si facciano due progreſſioni Aritmetiche, una che diſcenda collo ſminuimento di un'unità dal numero delle coſe da combinarſi, l'altra che aſcenda dalla unità, coll'aumento d'una unità, e l'una, e l'altra di tanti termini, quante unità ha l'eſponente della Combinazione; fatto queſto ſi moltiplichino fra loro ſcambie-

volmente, tanto i termini della prima progressione, quanto i termini della seconda, indi diviso il prodotto dei primi, per il prodotto dei secondi, il quoziente che ne verrà, sarà il ricercato numero delle Combinazioni, le quali si possono instituire secondo il dato esponente; e questa Regola è quella stessa appunto che tocca il Padre Tacquet, tolta da Pierro Erigonio.

CAPITOLO IV.

Delle Combinazioni, nelle quali può occorrere più volte la medesima cosa.

NEL ricercare le Combinazioni delle cose, tanto secondo tutti gli esponenti unitamente, quanto secondo cadauno d'essi, abbiamo supposto, che niuna cosa si possa unire con se medesima, nè perciò potersi più d'una volta pigliare nella medesima Combinazione, che se si voglia supporre che qualunque cosa possa ancora seco unirsi, e perciò più volte occorrere nella medesima Combinazione, allora il numero delle Combinazioni sarà molto maggiore, onde stando a tal metodo sarà facile trovare parimente queste Combinazioni.

Supponiamo dunque da combinarsi nel modo detto le lettere a, b, c, si facciano tante serie, quante sono le lettere, e nel principio di cadauna delle serie, si ponga una delle dette lettere; e per ritrovare le unioni delle lettere a due a due, di qualsivoglia serie, si combini la lettera, la quale è in principio della sua serie, non solamente colle precedenti lettere ad una ad una, ma ancora con se stessa; e similmente per formare le Combinazioni delle lettere a tre a tre, si combini, non solamente colle unioni delle lettere a due a due, delle precedenti serie, ma ancora della stessa sua serie, ed il medesimo si faccia ancora nelle Combinazioni, secondo tutti gli altri esponenti, nel qual modo facendo chiaramente apparisce, non potersi lasciare alcuna Combinazione, che possa farsi colle date cose.

a. aa. aaa
b. ab. bb. aab. abb. bbb
c. ac. bc. cc. aac. abc. bbc. acc. bcc. ccc.

Quindi si vede manifestamente, che in qualsivoglia serie il numero delle Combinazioni, secondo qualsivoglia dato esponente, è uguale al numero delle Combinazioni, le quali si ritrovano, tanto nella stessa serie, quanto nelle serie precedenti, secondo l'esponente minore di una unità, perciò la medesima Tavola, che di sopra si è fatta, dimostrerà le Combinazioni, le quali occorrono in qualsivoglia serie, secondo cadauno degli esponenti, se dalle colonne verticali cassati i zeri iniziali vi si pongano le Combinazioni, finchè sieno riempiuti i luoghi vacui di qualsivoglia colonna, e qualunque colonna cominci dall'unità, come dimostra la seguente Tavola.

Ta-

Tavola delle Combinazioni, ſecondo ciaſchedun eſponente.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8
3	1	3	6	10	15	21	28	36
4	1	4	10	20	35	56	84	120
5	1	5	15	35	70	126	210	330
6	1	6	21	56	126	252	462	792
7	1	7	28	84	210	462	924	1716
8	1	8	36	120	330	792	1716	3432
9	1	9	45	165	495	1287	3003	6439
10	1	10	55	220	715	2002	5005	11440

Queſta Tavola ha due proprietà, delle quali la prima ſi è, che ſe alcuni termini di qualunque colonna verticale ſi ſommino aſſieme, la ſomma ſarà il termine, il quale corriſponde all'ultimo termine della ſeguente colonna verticale. La ſeconda è, che in qualſivoglia colonna verticale ſe qualche termine ſi moltiplichi pel numero dei termini precedenti, aggiuntevi tante unità, quante ne moſtra il luogo della colonna, e il prodotto ſi divida pel numero della medeſima colonna, il quoziente ſarà la ſomma dello ſteſſo termine, coi termini precedenti.

Poſte queſte proprietà, non ſarà poi difficile ſommare aſſieme tutti i termini di qualſivoglia colonna verticale. Si prenda dunque, cominciando da capo, egual quantità di termini in qualſivoglia colonna, e venga ſignificata la loro quantità, per la lettera a, e perchè nella prima colonna qualſivoglia termine è l'unità, la ſteſſa lettera a, ovvero $\frac{a}{1}$, ci moſtrerà la ſomma degli ſteſſi termini, che per la prima proprietà ſarà l'ultimo termine preſo nella ſeconda colonna; onde ſe la medeſima ſomma ſi moltiplichi per a+1, ed il prodotto ſi divida per 2, ſarà per la ſeconda proprietà il quoziente $\frac{a.a+1}{1.2}$, la ſomma dei termini della ſeconda co-

lon-

lonna. E similmente perchè questa medesima somma è l'ultimo termine preso nella terza colonna, se si moltiplichi $a+2$, ed il prodotto si divida per 3, il quoziente $\frac{a \cdot a+1 \cdot a+2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, sarà la somma dei termini, della terza colonna, e non deviando dal medesimo metodo la somma dei termini sarà $\frac{a \cdot a+1 \cdot a+2 \cdot a+3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$, nella quarta colonna; $\frac{a \cdot a+1 \cdot a+2 \cdot a+3 \cdot a+4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot}$, nella quinta colonna, e così delle altre.

Si vede dunque, che questa somma si mostra con due progressioni Aritmetiche, e amendue che ascendono coll'aumento d'un' unità, una della quantità presa dai termini, l'altra dalla unità, e tanto l'una, quanto l'altra di tanti termini, quante unità contiene il numero della colonna; onde perchè la medesima somma denota tutte le Combinazioni, le quali si fanno da tante cose, quanti sono i termini presi, secondo quell'esponente, il quale denota il numero della colonna, con tal legge però che qualunque cosa si può unire, non solo colle altre cose, ma ancora con se stessa: Dunque per ritrovare tutte quelle Combinazioni, le quali si possono fare da più termini, secondo qualsivoglia dato esponente, si deve osservare la quì sotto notata Regola.

Si facciano due progressioni Aritmetiche, amendue ascendenti, coll'accrescimento di una unità, una che ascenda dal numero delle cose da combinarsi, l'altra che ascenda dalla unità, e l'una, e l'altra di tanti termini quante unità ha l'esponente della Combinazione; dippoi si moltiplichino fra di loro scambievolmente, tanto i termini della prima progressione, quanto i termini della seconda, e diviso il prodotto dei primi, per il prodotto dei secondi, il quoziente sarà il ricercato numero delle Combinazioni, che si possono fare secondo il dato esponente, con questo però, che qualunque cosa si ritrovi combinata, non solo colle altre, ma ancora con se stessa.

CAPITOLO V.

Delle Combinazioni, nelle quali osservasi ancora l'ordine, e il luogo delle cose.

NEl Capitolo secondo dicemmo, che le Combinazioni chiamansi conjunzioni di cose, nelle quali non considerando l'ordine, e luogo d'esse, soltanto si ha attenzione alla moltitudine, secondo la quale le cose date assieme si hanno da congiungere: per lo che le lettere a, b, c, formeranno un terzo, o ternario, scritte come si vuole: che se poniamo, che alcuno voglia considerare ancora la verità, che succede per l'ordine, e per il luogo delle cose da combinarsi, allora la quantità delle Combinazioni sarà senza dubbio assai maggiore, onde quì sotto si mostrerà in qual maniera ciò si possa avere.

E primieramente devonsi fare tali Combinazioni di cose, che qualsivoglia cosa non più d'una s'affaccia nelle Combinazioni, ne avviene per certo, che qualunque Combinazione a cagione dell'ordi-

dine, o del sito delle lettere, tante volte replicar dovrassi, quanti sono i modi diversi, nei quali possono permutarsi le lettere, che sono nella stessa Combinazione; e perciò avrassi la quantità delle Combinazioni, che possono farsi di più cose, secondo qualsivoglia dato esponente, sicchè l'ordine, o pure il sito delle cose medesimamente cagioni variazione; se il numero delle Combinazioni, le quali dalle medesime cose secondo tal esponente, non osservata questa legge si possono fare, si moltiplichi pel numero delle permutazioni diverse, che possono farsi da tante diverse cose, quante unità contiene il dato esponente.

Dalle cose già dimostrate nel Capitolo III. si ha il numero delle Combinazioni, che semplicemente possono farsi da più cose secondo qualsivoglia dato esponente, se fatte due progressioni Aritmetiche, una che discenda dal dato numero delle cose meno un' unità, l'altra che ascenda dalla unità, coll'aggiunta di un'unità, e l'una, e l'altra di tanti termini, quante unità contiene il dato esponente, e il prodotto dei termini della prima progressione si divida per il prodotto dei termini della seconda progressione; onde perchè attese le cose dimostrate nel Capitolo primo, il prodotto dei termini della seconda, denota il numero delle diverse permutazioni, che possono farsi da tante cose diverse, quante sono le unità nel dato esponente; il prodotto dei termini della prima, denoterà il numero delle Combinazioni, che possono farsi dalle medesime cose, secondo il medesimo esponente, con questo però, che dall'ordine, e sito delle cose, ne nasca variazione.

Ciò posto per trovare tutte le Combinazioni, che si possono fare di più cose, secondo qualsivoglia dato esponente, sicchè, e l'ordine, e il sito delle cose produca variazione, si tenga la seguente regola. Si faccia una progressione Aritmetica, che discenda dal dato numero delle cose, meno un'unità, e composta di tanti termini, quante unità contiene il dato esponente; indi si moltiplichino tra di loro scambievolmente tutti i termini di questa progressione, ed il prodotto che risulterà da questa moltiplicazione, ci mostrerà la quantità ricercata delle Combinazioni, dalla qual cosa rilevasi, che quando il dato esponente è uguale al numero delle cose; perchè nella progressione si discende fino alla unità, sia tanto, come se si cercassero le semplici permutazioni delle cose date.

Che se deggiansi cercare le Combinazioni delle cose, in maniera, che qualunque di quelle possa unirsi con se stessa, allora il numero di tutte le Combinazioni si troverà, se il numero dato delle cose si elevi a quella potestà, la quale mostra il dato esponente della Combinazione, cioè al quadrato se l'esponente è 2, al cubo se è 3, al quadrato-quadrato, se è 4, e così degli altri; per lo che tre cose diverse permutate, in tutti i modi daranno 9

Com-

Combinazioni a due a due, 27 a tre a tre, 81 a 4 a 4 ec., medesimamente, se il dato numero delle cose sia 4, si avranno 16 Combinazioni, tutte a due a due, 64 a tre a tre, 256 a quattro a quattro, e così in infinito.

Nè sembra difficile intendere questa regola, perchè se supponiamo a, b, c, d ec., il di cui numero sia m da combinarsi, cosicchè qualunque lettera possa unirsi a se stessa, e l'ordine, ed il sito ancora delle lettere induca variazione, certamente se a quelle si preporrà la lettera a, si avranno le unioni a due a due, che cominciano dall'a, se vi si preponga la lettera b, si avranno le unioni a due a due, che cominciano dal b, e così delle altre; pertanto la serie delle unioni a due a due, per la diversità delle lettere, dalle quali incominciano, tante saranno, quante sono le unità, nel dato numero m, e qualsivoglia serie avrà tante unioni a due a due, quante unità trovansi in detto numero, perciò sarà mm, che è lo stesso che dire, il quadrato del numero m, sarà il numero di tutte le unioni a due a due.

Se poi a queste unioni di lettere a due a due si ponga avanti la lettera a, ne verranno tutte le unioni a tre a tre, le quali cominciano dall'a, se si preponga poi la lettera b, si avranno tutte le unioni delle lettere a tre a tre, che cominciano dal b, lo che vale delle altre pure, onde le serie delle unioni delle cose a tre a tre, secondo la diversità delle lettere, dalle quali cominciano, saranno tante quante sono le unità nel dato numero m; e qualsivoglia serie avrà tante unioni di lettere a tre a tre, quante sono le unioni delle lettere a due a due, cioè quante unità conterrà il quadrato del dato numero m, e perciò sarà m^3, voglio dire il cubo del medesimo numero m, il numero di tutte le unioni delle lettere a tre a tre.

Nella medesima maniera se a queste unioni di lettere a tre a tre si collochi avanti la lettera a, ne verranno tutte le unioni a quattro a quattro, che cominciano da a, se vi si preporrà la lettera b, si avranno le unioni tutte a quattro a quattro, che cominciano dal b, e così osservasi delle altre, onde le serie delle unioni a quattro a quattro, secondo la diversità delle lettere, dalle quali incominciano saranno tante quante sono le unità nel dato numero m delle lettere, e qualunque serie avrà tante unioni di cose a quattro a quattro, quante sono le unioni a tre a tre, cioè quante unità avrà il cubo del dato numero m; e perciò m^4, cioè il quadrato-quadrato del medesimo numero m, sarà il numero di tutte le unioni a quattro a quattro.

Questo basti circa le Permutazioni, e Combinazioni a contemplazione dei Studenti, per altro non è da passarsi sotto silenzio, che i numeri delle colonne verticali di amendue le Tavole fatte di sopra sono nel numero di quelli, che vengono volgarmente chia-

ma-

mati dai moderni numeri figurati, onde valendomi di questa occasione non sarà fuori di proposito in grazia de' medesimi Studenti dare breve notizia di questi numeri; e perchè la considerazione di tali numeri ha avuto origine dalla contemplazione dei numeri Multangoli, fatta dagli Antichi, perciò, prima delle altre cose si dovrà mostrare, e spiegare cosa sieno i numeri Multangoli, ovvero Poligoni.

CAPITOLO VI.

Dei numeri Multangoli, ovvero Poligoni.

NUmeri *Multangoli*, o *Poligoni*, chiamansi quelli, che procedono da una continua raccolta di altri numeri, che derivano dalla unità, con ugual distanza; e secondo la diversità di questa distanza, così varie sono le specie dei numeri Multangoli: si chiamano *Numeri Triangoli*, se l'intervallo sia l'unità; si chiamano *Quadrati*, se l'intervallo è il 2; *Pentagoni*, se l'intervallo è 3, e così degli altri.

Se i numeri dunque, che con ugual distanza vengono dalla unità, sieno gli stessi numeri naturali 1.2.3.4.5.6.7.8.9 ec., perchè l'intervallo, col quale questi numeri s'avanzano è l'unità; dalla continua loro raccolta, ne verranno i numeri Triangoli, onde 1 sarà il primo Triangolo 1 + 2, ovvero 3 sarà il secondo Triangolo, 1 + 2 + 3, ovvero 6 sarà il terzo Triangolo, e così in infinito.

Che se i numeri derivanti dalla unità con egual distanza sieno impari naturali 1.3.5.7.9.11.13.15 ec., perchè l'intervallo, col quale s'avanzano è il numero 2, avremo dalla loro unione tutti i numeri Quadrati; per lo che 1 sarà il primo Quadrato, 1+3, ovvero 4 sarà il secondo Quadrato, 1 + 3 + 5, ovvero 9 sarà il terzo Quadrato, e così degli altri.

Che se poi la serie de' numeri, che cominciano dalla unità, con egual distanza sia 1.4.7.10.13.16.19 ec., perchè la distanza nella quale si trovano questi numeri è il numero 3, ne risulteranno dalla loro continua unione tutti i numeri Pentagoni; onde 1 sarà il primo Pentagono, 1+4, ovvero 5 sarà il secondo Pentagono, 1+4+7, ovvero 12 sarà il terzo, e così di seguito.

Nella medesima maniera, se la serie dei numeri, che spiccansi dalla unità con ugual distanza sia 1. 5. 9. 13. 17. 21. 25 ec., perchè la lontananza, nella quale stanno tai numeri è il numero 4, ne nasceranno dalla loro unione continua tutti i numeri Esagoni; onde 1 sarà il primo Esagono, 1+5, ovvero 6 sarà il secondo Esagono, 1 + 5 + 9, ovvero 15 sarà il terzo Esagono, e così s'intenda degli altri.

Medesimamente se la serie dei numeri, che hanno principio dalla unità, con egual distanza sia 1. 6. 11. 16. 21. 26. 31 ec. perchè la loro distanza è il numero 5, si avranno tutti i numeri Eptagoni; onde 1 sarà il primo Eptagono, 1+6, ovvero 7 sarà il secondo, 1+6+11, ovvero 18 sarà il terzo, e così degli altri.

Il primo che considerò questi numeri Poligoni, ovvero Multangoli, siccome rileviamo dagli Antichi, fu Ipsicle, che deffinì l'origine di essi in questa maniera. Sieno qualsivogliano numeri, che con ugual distanza procedano dalla unità, la loro somma sarà Triangolo se la distanza sia l'unità; Quadrato se il 2; Pentagono se il 3; Esagono se il 4, e così degli altri.

E perchè il numero degli angoli in questa diffinizione di Ipsicle vien notata col numero maggiore, per la distanza di due, colla quale distanza i numeri procedano dalla unità, perciò Diofanto generalmente così intese quella medesima diffinizione, abbiansi qualsivogliano numeri, che procedino dalla unità con egual distanza, la loro somma sarà un numero Multangolo, e conterrà tanti angoli quante unità ha il numero che supera la distanza di due.

Questi numeri sono stati detti Multangoli, oppure Poligoni, perchè le loro unità con eguali distanze possono esser disposte in forma di Poligono Equilaterale, voglio dire i numeri Triangoli in forma di Triangolo Equilatero, i numeri Quadrati in forma di Quadrato, oppure di Rombo, e così degli altri; onde possono ancora chiamarsi numeri Multangoli, o Poligoni quelli, le cui unità con uguali distanze formano un Multangolo, o Poligono Equilatero.

Dal che ne siegue, che qualunque numero derivante dal 3 più un'unità essere Multangolo, e che contiene tanti angoli o lati, quante unità contiene lo stesso numero; ciò presupposto 3 è Triangolo, o diciamo un numero di tre angoli, il 4 Quadrato, ovvero numero di quattro Angoli, e così degli altri, la ragione di questo si è, perchè le unità di cadauno di tai numeri possono disporsi successivamente con ugual distanza, sicchè facciano una figura di tanti lati uguali.

E perchè nella stessa unità, virtualmente si acclude ogni Multangolo, mentre ella è Triangolo, è Quadrato, è Pentagono, è Esagono ec., e perchè la proprietà di tutti questi Multangoli conviene, e compete alla stessa unità, onde qualsivoglia numero cominciando dal 3 sarà Multangolo nella sua specie, come primo, che procede dalla unità, cioè il 3 primo Triangolo, il 4 primo Quadrato, il 5 primo Pentagono, il 6 primo Esagono, e così degli altri.

Quindi si vede che ogni numero Multangolo, o sia il primo do-

dopo l'unità, o sia qualunque altro, se mostri colle sue unità egualmente distanti lo stesso Multangolo, per suo lato avrà numero tale, che conterrà tante unità, quanti sono i termini dalla cui unione ne procede il dato numero Multangolo; così perchè il numero triangolo 10 nasce dalla unione di quattro termini, 1. 2. 3. 4, tal numero avrà per suo lato il numero 4, e medesimamente perchè il numero quadrato 25 si ha dalla unione di cinque termini 1. 3. 5. 7. 9. avrà per suo lato il numero 5.

Circa simili numeri Multangoli, e Poligoni sogliono farsi principalmente due Problemi, dei quali il primo è, dato il lato ritrovare il Multangolo della proposta specie, il secondo è, dato il Multangolo, e la di lui specie determinare il di lui lato. Dalle cose dette circa l'origine di questi numeri, è chiaro che la soluzione di questi Problemi dipende da questi altri seguenti. Dato un numero di termini che sieguano dalla unità, con un dato intervallo ritrovare la somma di tutti; e vicendevolmente data la somma di più termini provenienti dalla unità con un dato intervallo rinvenire il numero loro; onde perchè questi due Problemi già sono stati sciolti dal Padre Tacquet nel Libro quinto dell'Aritmetica pratica, Capitolo secondo, (*e nella nostra Aritmetica Cap. IV. della Parte sesta del secondo Tomo*) perciò sarebbe frustraneo, che quivi ne facessimo parola.

CAPITOLO VII.

Dei Numeri Figurati.

DAI Numeri Multangoli, o diciamo Poligoni si è poi venuto alla considerazione dei numeri, che chiamansi *Figurati*, perchè siccome fra gli Antichi Ipsicle, e dopo lui Diofanto considerarono i numeri che nascono da una continua somma d'altri numeri, che con ugual distanza hanno origine dalla unità, e li chiamarono Multangoli, oppure Poligoni, perchè le loro unità disposte con uguali distanze mostrano un Multangolo, ovvero Poligono equilatero; così i Moderni non contenti di ciò considerarono ancora gli altri numeri che provengono dalla unione, o raccolta degli stessi Multangoli, e dei numeri che da essi Multangoli ne procedono; e ugualmente questi che quelli chiamarono numeri Figurati, perchè per le loro unità disposte con uguali distanze possono acquistare diverse figure.

I numeri Figurati, però dai Moderni, non solo chiamansi quelli che nascono da una continua raccolta di altri, che con ugual distanza hanno in principio l'unità, ma quelli pure che si hanno da un continuo aggiungimento dei numeri di lì provenuti; dal che è

chiaro che questi numeri Figurati, non solo possono distinguersi in varj generi attesa la diversa distanza, colla quale si comincia la progressione, ma di più li stessi numeri di qualunque genere si possono dividere in varj ordini, secondo la diversa ragione, per la quale hanno origine da quei medesimi *numeri Genitori*, cioè presi in principio.

Se la distanza dunque, colla quale s'incamminano i numeri Genitori, cominciando dalla unità, sarà l'unità, i numeri Figurati di lì avanti potrannosi chiamare del primo genere; con tutto ciò però in questo medesimo genere, siccome diconsi numeri Genitori quei stessi numeri, che s'incamminano dalla unità, coll'aumento di una unità; così potrannosi chiamare numeri Figurati del primo ordine quelli, i quali nascono dall'aumento dei numeri Genitori del secondo ordine; i numeri figurati che nascono dalla continua raccolta di quelli, i quali sono del primo ordine; del terzo ordine, i figurati che vengono dalla continua raccolta di quelli che sono del secondo ordine, e così degli altri.

Medesimamente, se la distanza, colla quale vanno i numeri presi da principio, cominciando dalla unità sia il 2, i numeri Figurati di lì provenienti si chiameranno del secondo genere; e siccome in questo medesimo genere si dicono numeri Genitori li stessi numeri, che cominciano dalla unità coll'aumento di 2, così potrannosi dire numeri Figurati del ptimo ordine, quelli che nascono dall'aumento istesso dei numeri Genitori; numeri Figurati del secondo ordine quelli che nascono dall'aumento di quelli, che sono del primo, i numeri Figurati del terzo ordine, quelli che vengono dal secondo, e così in infinito.

Da queste cose chiaro si rende, quello che fu detto nel fine del Capitolo V., che i numeri delle colonne verticali di amendue le Tavole fatte di sopra, sono fra quei che dai Moderni volgarmente chiamansi numeri Figurati.

I numeri raccolti dal principio di una colonna verticale, tanto nell'una, quanto nell'altra di quelle Tavole, danno i numeri della colonna verticale che ne siegue. Perciò perchè nella seconda colonna verticale si hanno tutti i numeri Naturali, che sieguono dalla unità colla distanza di una unità, è chiaro che in quelle colonne sonovi i numeri Figurati del primo genere; cosicchè siccome nella seconda colonna stanno i numeri Genitori, così nella terza trovansi i numeri Figurati del primo ordine; nella quarta i numeri Figurati del secondo ordine, e nella quinta i numeri Figurati del terzo ordine, e così degli altri; e nella prima colonna verticale di qualsivoglia Tavola, evvi la serie delle unità, dalla unione continua delle quali si producono i numeri Naturali della seconda colonna.

Que-

Questi numeri Figurati hanno maravigliose proprietà, che molto giovano per esercitare i Principianti, e tra quelli che sono del primo genere basterà notare questa, che se essi così si dispongono, come si vedono nella prima Tavola, sicchè nella prima colonna verticale siavi la serie delle unità, nella seconda la serie dei numeri Naturali, indi nelle altre vi sieno gli stessi numeri Figurati, che si hanno dal continuo aumento di quelli, e cadauna colonna abbia tanti zeri in principio, quante unità contiene il numero della colonna, levatane una, voglio dire, che i numeri delle colonne transversali mostrino ordinatamente i coefficienti di tutte le potestà derivate da qualche radice binomia, come sarebbe a dire $a+b$.

I coefficienti della stessa radice $a+b$, sono i numeri 1, 1, che trovansi nella seconda colonna transversale, i coefficienti del quadrato $a^2+2ab+bb$, sono i numeri 1, 2, 1, che trovansi nella terza colonna, i coefficienti del cubo $a^3+3a^2b+3ab^2+b3$, sono i numeri 1, 3, 3, 1, che si vedono nella quarta colonna, i coefficienti del quadrato-quadrato $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$, sono i numeri 1, 4, 6, 4, 1, che sono nella quinta colonna, e così degli altri, perlochè se quella prima Tavola si proseguisca in infinito, per essa facilmente si eleverà qualunque radice binomia a qualunque data potestà.

Tutta dunque la difficoltà che trovasi in formare le potestà, si è nel ritrovare i coefficienti, coi quali si deono segnare i termini delle potestà, perchè i termini facilmente si hanno, se fatte due progressioni Geometriche, i cui esponenti sieno le stesse parti della radice binomia proposta, e delle quali una discenda dalla potestà ricercata del suo esponente fino all'unità, l'altra ascenda dalla unità, fino alla potestà ricercata del suo esponente, si moltiplichino i termini di una progressione, per i termini corrispondenti dell'altra.

Supponiamo dunque di cercare i termini del cubo della radice binomia $a+b$, bisogna fare due progressioni Geometriche, delle quali una avendo per suo esponente la parte a, discenda dal cubo dello stesso a, fino all'unità, l'altra avendo per suo esponente la parte b, ascenda vicendevolmente dalla unità fino al cubo dello stesso b, perchè di queste progressioni, la prima essendo a^3, a^2, a, 1; la seconda 1. b, b^2, b^3, moltiplicati ordinatamente i termini, di una progressione per i termini dell'altra, ne risulteranno i termini del cubo ricercato a^3, a^2b, ab^2, b^3.

Se medesimamente deggiansi trovare i termini del quadrato cubo della radice binomia $a+b$, si formino due progressioni Geometriche, delle quali una abbia per suo esponente la parte a, e dal quadrato cubo dello stesso a, discenda fino all'unità; l'altra ab-

abbia per suo esponente la parte b, e vicendevolmente dall' unità ascenda fino al quadrato cubo dello stesso b, mentre la prima di coteste progressioni essendo a^5, a^4, a^3, a^2, a^1, la seconda 1, b, b^2, b^3, b^4, b^5, moltiplicati i termini di una progressione con ordine, per i termini dell' altra, si avranno i termini del quadrato cubo ricercato a^5, a^4b, a^3b^2, a^2b^3, ab^4, b^5.

Pertanto i termini di qualunque potestà facilmente avendosi da qualche radice binomia, è chiaro, che tutta la difficoltà nel formare le potestà, consiste nel ritrovare i coefficienti da segnare i termini; onde subito, che questi coefficienti si trovano ordinatamente nelle colonne transversali della predetta Tavola, è fuor di dubbio, che mediante essa facilissimamente può elevarsi qualunque radice binomia a qualunque data potestà, e se avremo a memoria le proprietà memorate nel Capitolo III. circa i numeri di quella Tavola, potremo stabilire una certa formola generale, in vigor della quale qualunque radice binomia si eleverà a qualunque potestà; la qual cosa perchè da noi si è fatta nei nostri Elementi dell' Algebra (*a*), che quanto prima verranno alla luce, onde ora ciò passeremo sotto silenzio, per non dire più volte la stessa cosa.

(a) *Gli Elementi suddetti sono stati Stampati in Napoli per il Mosca, in due Tomi in ottavo, ed ultimamente del 1737. per lo stesso Stampatore, accresciuti dall' Autore, e ridotti in tre Tomi in ottavo.*

DELL'

DELL' ARITMETICA DI GIUSEPPE ALBERTI

PARTE DECIMA.

DIZIONARIO ARITMETICO.

SO, che alcuni forse diranno, che mi sarei potuta avanzare questa fatica, avendo ciò fatto Monsieur Ozanam nel suo Dizionario Mattematico. Egli è vero, che Monsieur Ozanam ciò ha fatto: ma quando altro fatto non avessi, che ridir quì tutto ciò, che lo stesso Ozanam ha detto nel suo Dizionario Mattematico, sembrami, se mal non m'appongo, che non avrei mal fatto, e che disgradevol cosa non sarebbe stata l'avere in un sol corpo posto ciò, che sparso trovasi in varj Autori, ed averlo ancora ridotto nel nostro Italiano Idioma in grazia di quegli Italiani Aritmetici, che la lingua Francese non possedessero. Di ciò solo però non mi son contentato. Mi son ben servito del suddetto Dizionario, ma non ho però mancato d'abbreviar molte cose non necessarie al solo Aritmetico, ed altre ancora aggiungervene, particolarmenti attinenti alla pratica. Ho posto ogni cosa per ordine, sotto le sue rispettive lettere dell'Alfabetto, secondo un vero Dizionario, come pure la stessa cosa ho posta sotto varie lettere, secondo che può esser cercata dal Lettore, e questo acciocchè senza molto faticare possa trovar con prestezza ciò che brama. E perchè nello spiegare i termini posti in questo Dizionario è stato vopo servirsi di altri termini, posti pure nello stesso Dizionario, perciò questi si sono fatti ancor essi in *Corsivo*, per denotare che la spiegazione di essi trovasi nello stesso Dizionario alla sua rispettiva parola, acciocchè con prestezza possa il nostro Aritmetico ritrovarli; Perciò ho stimato che al nostro Aritmetico a grado sia per essergli questa mia fatica, che in di lui grazia ho fatto.

I Numeri Aritmetici, posti in questo Dizionario, mostrano i numeri che sono nel margine dell'Opera, per poter ad essi ricorrere, ed avere nello stesso tempo più distinta notizia di ciò che in tal luogo parla il Dizionario. I numeri Romani I. II. III. apposti a quei numeri, denotano i Tomi, cioè I. primo, II. secondo, III. terzo. Dove poi non sono numeri, di ciò mostrasi non averne fatta parola nell'Opera, onde tali cose nel Dizionario più dell'altre vengon spiegate, nel qual modo lo stesso Dizionario fa uffizio di Tavola, e serve alla comodità.

ARIT-

A

ARITMETICA è la scienza del *numero*. 1. I.

Aritmetica Teorica è quella che considera le cagioni, le qualità, e le proprietà dei *numeri*. 2. I.

Aritmetica Pratica è quella che insegna l'Arte del Calcolare. 3. I.

Aritmetica ragione, cioè *Ragione Aritmetica* è la comparazione che si fa di due *numeri*, per rapporto all'eccesso del più grande sopra il più picciolo; ovvero a quello che manca al più picciolo per uguagliare il più grande, quando sono inuguali, ovvero all' ugualità di due *numeri*, quando sono uguali.

Aritmetica ragione razionale, cioè *Ragione Aritmetica razionale* è quella, dove i due *termini* sono *razionali*, come la ragione di 2 a 3.

Aritmetica ragione irrazionale, cioè *Ragione Aritmetica irrazionale* è quella, dove li due *termini* non sono *razionali*; come la *ragione* di 2 alla *radice* di 5, e la *ragione* della *radice* di 2, alla *radice* di 5, e così delle altre.

Aritmetica proporzione, ovvero *proporzione Aritmetica*, cioè quattro numeri *Aritmeticamente proporzionali*, sono due *ragioni Aritmetiche simili*, per denotare le quali si scrivono così 6. 4. 10. : 8.

Aritmetica proporzione continua, cioè *Proporzione Aritmetica continua* è una similitudine di *ragioni Aritmetiche*, come 1, 2, 3, 4 ec. ovvero 1, 3, 5, 7 ec. 44. II.

Aritmetica medietà, cioè *medietà Aritmetica*, s'intende di tre *termini* in *proporzione Aritmetica*, come 2, 5, 8, mentre l'eccesso del secondo 5, sopra il primo 2 è uguale all'eccesso del terzo 8, sopra il secondo 5.

Aritmetica Progressione, cioè *Progressione Aritmetica* è una serie, o seguito di *numeri*, che sono in una *continua proporzione Aritmetica*, come 1, 2, 3, 4, 5 ec. ovvero 1, 3, 5, 7, 9 ec. 44. II.

Aritmetica Progressione naturale, cioè *Progressione Aritmetica naturale* è quella, che principia dall'*unità*, colla differenza di un' *unità*, come questa 1, 2, 3, 4, 5 ec. 46. II.

Aritmetica Progressione naturale pari, ovvero *Progressione Aritmetica naturale pari* è quella, che principia dal 2 colla differenza 2, così 2, 4, 6, 8 ec. 47. II.

Aritmetica Progressione naturale impari, ovvero *Progressione Aritmetica naturale impari* è quella, che principia dall'*unità*, colla differenza 2 così 1, 3, 5, 7 ec. 48. II.

Aritmetica Progressione crescente, o ascendente, cioè *Progressione Aritmetica crescente, o ascendente* è quella che nel continuarla sempre cresce, come questa 1, 4, 7, 11, 15 ec 50. II.

Aritmetica Progressione decrescente, o discendente, cioè *Progressione Aritmetica decrescente, o discendente* è quella che nel continuarla sempre si diminuisce, come questa 15, 13, 11, 9 ec. 51. II.

Arit-

Aritmetiche ragioni uguali, *o simili*, cioè *Ragioni Aritmetiche uguali*, *o simili* sono quelle, ove la differenza dei più piccioli *termini* è uguale alla differenza dei più grandi; come la *ragione* di 2 a 5 è uguale, o simile a quella di *6* a *9*, perchè la differenza 3 dei più piccioli *termini* 2, e 5, è uguale alla differenza dei più grandi *6*, e *9*.

ARITMETICO chiamasi quello, il quale possiede l'arte dei *numeri*.

Aritmetico Teorico è quello che possiede le cagioni, proprietà, e qualità dei *numeri*.

Aritmetico Pratico è quello che ha la pratica del Calcolare.

Aritmetico numero, cioe *Numero Aritmetico* è un *numero razionale* qualunque considerato in se indipendentemente da tutti gli altri *numeri*, come 2, 4, 5, ec.

Abaco, ovvero Tavola Pittagorica è una Tavoletta che contiene la *Moltiplicazione* dei *numeri semplici*. *46*. I.

Aggregato intendesi l'unione di più *numeri*, o di più unità. 35. I.

ANALOGIA è una similitudine di *ragioni Geometriche*.

ARTE CALCULATORIA è propriamente il modo di contare con dei segni, o piccioli sassi, mentre questa parola deriva dal Latino *Calculus* che significa sasso.

ARMONICA PROPORZIONE, cioè *Proporzione Armonica* sono tre *numeri*, il primo dei quali ha la medesima *proporzione* al terzo, che ha la differenza tra il primo, e il secondo, alla differenza tra il secondo, e il terzo. *67*. II.

Armonica ragione, *ovvero Ragione Armonica* è la comparazione di due *numeri razionali*, in tanto che eglino sono applicati a misurare l'armonia del suono nella Musica.

Armonica medietà, ovvero *Medietà Armonica*, s'intende di tre *termini* in *proporzione Armonica*, come 3, 4, *6*.

Antecedente di una *ragione*, *o proporzione* è il *termine* della ragione, il quale si paragona, o comparà all'altro. 21. I.

Aliquota, cioè *Parte aliquota* di un *numero* è un numero più picciolo, che è compreso in un più grande un certo numero di volte, senza alcuno avanzo. 15. I.

Aliquanta, cioè *Parte aliquanta* di un *numero* è un numero più picciolo, il quale è contenuto nel più grande un certo numero di volte non esattamente, ma vi rimane qualche cosa. *16*. I.

Amicabili, cioè *Numeri Amicabili*, sono due *numeri* intieri, cadauno dei quali è uguale a tutte le *parti aliquote* dell'altro prese insieme. *63*. II.

Abbondante, cioè *Numero abbondante* è quello che è maggiore di tutte le sue *parti aliquote* prese insieme, come 24 che è maggiore della *somma 36* di tutte le sue parti aliquote 1, 2, 3, 4, *6*, 8, 12, e così di molti altri.

ALLIGAZIONE, cioè *REGOLA D'ALLIGAZIONE* è quella, che insegna ad alligare, o mescolare insieme più cose di diverso valore, e di trovare quanto ne bisogna prendere di ciascuna, secondo il *numero* della dimanda. 22. II.

Alligazione in ugualità, cioè *Regola di Alligazione in ugualità* è allora quando le cose da alligarsi sono uguali di *numero*. 24. II.

*Alligazione in ineguali*tà, cioè *Regola di alligazione in ineguali*tà, è allora quando le cose da alligarsi, sono ineguali di *numero*. 25. II.

Avanzo di una radice è quello chè v' è di più della *potestà razionale*, che viene espressa dalla *radice*. 118. I.

Abbreviare le Moltiplicazioni, vuol dire usare un modo più breve dell' ordinario. 52. 65. I.

Abbreviare le divisioni, vuol dire operare in più breve maniera dell' ordinaria. 78. I.

Abbassare, *Schifare*, *ridurre a minori termini*, o *denominazione* una *frazione*, vuol dire *dividere* il *numeratore*, e il *denominatore* di essa per una *comune misura*. 99. I.

Algoritmo, ovvero *Logistica numerosa*, s' intende per le operazioni d' *Aritmetica*, cioè *Sommare*, *Sottrarre*, *Moltiplicare*, *Partire*, ed *Estraere le radici*.

Altezza di un Triangolo rettangolo in numeri è uno dei due minori *numeri* dei tre numeri del *Triangolo rettangolo in numeri*, nel qual caso l' altro numero di detti due, chiamasi la *base del Triangolo rettangolo in numeri*.

Aria di un Triangolo rettangolo in numeri è un *numero* uguale alla metà del prodotto dei due più piccioli lati, onde si conosce, che l' aria del Triangolo rettangolo in numeri 6, 8, 10, e 24; e quello di questo 10, 24, 26, e 240.

B

B*Ase di un Triangolo rettangolo in numeri* è uno dei due minori numeri, dei tre numeri del Triangolo rettangolo in numeri, nel qual caso l'altro numero dei detti due chiamasi *l'altezza del Triangolo rettangolo in numeri*.

Barlungo numero, ovvero *Numero Barlungo* è un *numero piano* provenuto dalla *Moltiplicazione* di due numeri differenti, l'uno dall' altro dell' *unità*, come 6, che proviene da 2, e 3 ec.

C

C*Ontare*, ovvero *numerare* non è altra cosa che unire più unità in una sola idea.

CUBO, cioè *Numero Cubo* vuol dire qualunque *numero* provenuto da un *numero quadrato* moltiplicato nella sua *radice*. 30. I.

Cuba, cioè *Radice Cuba* è la stessa *radice* del *numero quadrato*, che ha moltiplicato lo stesso numero quadrato, acciocchè ne provenga il *numero Cubo*. 31. I.

Co-

Comune misura, ovvero *Misura comune* di due, o più *numeri*, è un numero più picciolo fuori dell'*unità*, che li *divide*, o *misura* tutti esattamente. Così 4 è la misura comune di questi tre numeri 12, 20, 24, perchè li misura esattamente per questi 3. 5. 7.

Conseguente di una ragione, o *proporzione*, è il *termine* della ragione che vien paragonato al tuo *antecedente*. 21. I.

Commensurabili fra di loro, cioè *Numeri commensurabili fra di loro* sono quelli la di cui *ragione Geometrica* è *razionale*; onde questi due numeri $\sqrt{18}$, $\sqrt{50}$, sono commensurabili fra loro, perchè la loro ragione è razionale, essendo uguale a quella di 3 a 5.

Continui proporzionali, o *Numeri proporzionali continui* sono i *numeri in proporzione continua*, come 2, 4, 8, 16.

Caratteri, o *Figure Aritmetiche* sono quelle che esprimono le *unità*, come 1 vale un'unità, 2 due, 3 tre, 4 quattro, 5 cinque, 6 sei, 7 sette, 8 otto, 9 nove. 6. I.

Commisurazione di un numero rispettivamente a un altro, vuol dire quante volte il dato numero *misura* l'altro 36. I.

Conoscere i numeri quadrati, *e Cubi per pratica*, vuol dire conoscere, se un dato numero sia *quadrato*, o *Cubo* senza far computi. 117. 125. I.

CONTO IN PRATICA è il modo di fare la *Regola del tre* con brevità, come usano i Mercanti. 9. II.

Conto in Pratica alla lunga è una maniera di sciorre la *Regola del tre*, con un *Conto in Pratica*, non usando quella brevità che si può. 10. II.

Conto in Pratica della figura tagliata è una maniera di *Conto in Pratica*, che si fa tagliando una *figura*. 11. II.

Conto in Pratica alla Fiorentina è la maniera di fare il Conto in Pratica all'indietro. 12. II.

CENSO vuol dire pigliare denari, o Mercanzie col patto di pagare un tanto per lira per cento ec., l'anno per tutto il tempo che si avrà tai denari, o Mercanzie. 30. II.

Censo a scaletta, o *scontare a scaletta* è pagare un tanto all'anno, mese ec., per un *Censo* computando in tal pagamento *i frutti*, e il rimanente per estinzione del *Capitale*. 32. II.

Censo a capo d'anno detto ancora *Frutto dei frutti*, *Profitto dei Profitti*, o *Usura*, s'intende che non pagando i frutti di un *Censo* questi si convertino in *Capitale*. 34. II.

Capitale, vuol dire quel tanto che si pone in un Negozio, o che si dà a *Censo*.

Compensazione dei tempi, *per saldare i pagamenti fra i Mercanti* è lo stesso che ridurre più pagamenti che dovevansi fare in varj tempi, ad un sol tempo, o termine. 37. II.

Compensazione dei tempi, *per saldare i pagamenti a capo d'anno* è lo stesso che considerare il frutto a ragione di *Censo a capo d'anno*, per poi dedurne il termine del pagamento. 38. II.

Compensazione de i pagamenti fra i Mercanti, o saldare le ragioni fra i Mercanti, è il modo di saldare i debiti, riguardo al tempo che deve compensare il pagamento. 39. II.

Compensazione dei pagamenti a capo d' anno, è il modo di saldare i debiti, riguardo al tempo, che compensa il pagamento, intendendo però il *Censo a capo d' anno*. 40. II.

CAMBIO, vuol dire trovare quanto alcune date monete di una Città sieno di altre monete di un' altra Città. 42. II.

COMBINAZIONE, o Combinare, vuol dire trovare il numero di più cose a due a due, a tre a tre, a quattro a quattro ec. 1. 4. III.

Combinare, secondo tutti gli esponenti, vuol dire *combinare* insieme più cose per tutti gli *esponenti* possibili. 4. III.

Combinare secondo ciascheduno esponente, vuol dire *combinare* insieme più cose per tutti gli esponenti separatamente. 6. III.

D

D*IVISIONE, dividere, o partire un numero per un altro*, vuol dire trovare un *numero*, che mostri quanto uno di due dati numeri capisce, o entra nell' altro. 66. I.

Divisione semplice è il modo di dividere i numeri semplici.

Divisione composta, o di diverse specie, è il modo di dividere i numeri di diversa specie. 70. I.

Divisore, vuol dire quel *numero* che divide un altro. 66. I.

Dividendo intendesi nella *divisione* quel numero che viene diviso da un altro. 66. I.

Dividere un numero per più numeri, vuol dire dividere un *numero* per il *prodotto* di tutti gli altri. Come dividere questo numero 360 per questi tre, 2, 3, 5, vuol dire dividere il 360, per 30, e il *quoziente* sarà 12.

Dividere, o Partire per colonna, o per testa, è quella *divisione* che si può fare in una sol riga. 66½. I.

Dividere, o Partire per danda alla lunga, vuol dire la *divisione* di quei *numeri*, che non si possono dividere in una sol riga. 67. I.

Dividere, o Partire per danda alla corta, vuol dire dividere un numero che non si può dividere in una sol riga, con maggior brevità della *Danda alla lunga*. 68. I.

Dividere, o Partire di diversa specie, vuol dire dividere delle quantità che sieno di diversa specie, come lire, soldi, e denari; piedi, oncie, e punti ec. 70. I.

Dividere, o Partire, mediante la Tavola Pittagorica, vuol dire nel fare la divisione servirsi della *Tavola Pittagorica*. 72. I.

Dividere, o Partire, mediante i Logaritmi, vuol dire nel fare la divisione, servirsi dei *Logaritmi*. 73. I.

Dividere, o Partire all' uso Oltramontano, vuol dire dividere nel modo che usano i Popoli di là dai Monti. 74. I.

Di-

Dividere, *o Partire per Battello*, vuol dire fare la *divisione* in forma di Battello. 75. I.

Dividere, *o Partire per Galea*, vuol dire fare la *divisione* in forma di Galea. 76. I.

Dividere, *o Partire per ripiego*, vuol dire partire in più pezzi. 77. I.

Denaro intendesi nei *Censi* quella parte del 100, per rapporto all' *unità* del frutto del 100. 35. II.

DIACTILONOMIA è il modo di *numerare* colle dita, dando 1 al pollice della man dritta, 2 all' indice, 3 al medio, e così di seguito, seguendo poi alla man manca, principiando dall' auricolare, o dito picciolo.

Dimensioni, *o Potenze* sono tutti quei *prodotti*, che si possono da qualsivoglia *numero*, moltiplicandolo continuamente per lo stesso numero, onde se si sarà moltiplicato due volte, come 2 via 2; che fa 4, questo numero che è *quadrato* chiamasi seconda *potenza*, il detto 4 moltiplicato per lo stesso 2, che fa 8, ed è *numero Cubo*, chiamasi *terza potenza*, se questo 8 si moltiplica per lo stesso 2, il 16 che ne proviene sarà la *quarta potenza*, e così di seguito. 112. I.

Diametro di un numero diametrale è *l' hipotenusa* di quel *Triangolo rettangolo in numeri*, il doppio della di cui *superficie* è il *numero diametrale*: dove si vede che nel *Triangolo rettangolo in numeri* 3, 4, 5, ha 5 per suo *numero diametrale*, e 12 è il doppio di tutto il *triangolo in numeri*, cioè il *numero diametrale*.

Denominatore di un rotto, *o frazione* è un *numero* che esprime la qualità, ovvero la specie; oppure esprime il *numero intiero*, in cui è divisa l' unità. 95. I.

Denominatore di una ragione geometrica, è il *quoziente*, che nasce dividendo l' *antecedente* della *ragione* pel suo *conseguente*, dove si vede, che il denominatore di questa ragione 2 a 3 è $\frac{2}{3}$. Così pure quella di 3a2, ha il denominatore $\frac{3}{2}$, e così degli altri. 58. II.

Decima medietà moderna, ovvero *medietà decima moderna* è quella, ove il terzo eccesso stà al secondo, come il secondo *termine* al terzo: Così 7, 6, 4.

E

ESTRAERE *qualsivoglia radice da un numero*, vuol dire trovare un altro numero, il quale moltiplicato tante volte in se stesso, quante sono le unità dell' esponente, della potestà del dato numero: cioè moltiplicato due volte, se del dato nnmero vuolsi la *seconda potestà*, tre volte se la terza, quattro volte se la quarta, e così di seguito produca lo stesso dato numero. 114. 130. I.

Estraere la radice quadrata da un numero, è trovarne un altro, il quale essendo moltiplicato per se stesso produca il dato numero, 114. I.

Estra-

Estraere la radice Cuba da un numero, è trovarne un altro, il quale moltiplicato tre volte in se stesso produca il dato numero. 124. I.

Estraere la radice quadrata, e cuba, mediante i Logaritmi, vuol dire servirsi dei *Logaritmi*, per trovare la *radice quadrata* di un dato numero. 119. 126. I.

Estraere la radice quadrata, colla somma, o colla sottrazione, vuol dire servirsi della *somma*, o della *sottrazione*, per estraere la radice quadrata. 120. I.

Estraere la radice quadrata, e cuba, mediante la Tavola Pitagorica, vuol dire servirsi della suddetta Tavola, per l'estrazioni delle radici quadrate, e cube. 122. 127. I.

Estraere le Radici per approssimazione, vuol dire trovare la *Radice* più prossima al vero di quei numeri che hanno la *Radice irrazionale*. 123. 129. 131. I.

Estraere le Radici quadrate, e cube, colla Tavola dei Quadrati, e dei cubi è il modo di adoperare la detta Tavola, nella estrazione delle suddette Radici. 133. I.

Esponenti di una Progressione, sono i numeri che indicano i luoghi dei termini. 59. II.

Esponente di una Combinazione è quel numero, che mostra quante delle date cose deonsi unire assieme. 5. III.

Esponente, o Indice di una data potestà, è quel numero che mostra quante volte si moltiplicò un dato numero, onde poi ne è provenuta la data potesta, perciò il 2 sarà l'esponente del *numero quadrato*, o *seconda potestà*, il 3 del *numero Cubo*, o *terza potestà*, e così delle altre. 113. I.

Eccesso, Esponente, o Indice di una Progressione Aritmetica è la differenza che trovasi fra un *termine* all'altro della Progressione. 49. II.

Equimultipli sono *numeri*, che si contengono ugualmente; cioè a dire tante volte gli uni, che gli altri loro *summultipli*, dove si conosce che li due numeri 12, 6, sono *equimultipli* di loro *summultipli* 4, e 2, perchè ciascuno contiene il suo *summultiplo* tre volte.

Evalvazione d'una frazione è il valore della stessa frazione in lire, soldi, e denari.

Egualità di ragione, o ragione di egualità è quella che si trova fra due *numeri* uguali, come 2 a 2, 3 a 3 ec.

F

FRazione, *o numero rotto* è quello che rappresenta la parte di un' *unità*. 93. I.

Frazione impropria, ovvero *numero rotto improprio* è quello che è maggiore dell'unità, come $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$ ec. 96 $\frac{1}{2}$. I.

Frazioni, o rotti della medesima denominazione, ovvero *della medesi-*

desima specie sono quelli, che hanno i *denominatori* uguali, come $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$ ec. 103. I.

Frazioni, o rotti di diversa denominazione, ovvero *di diversa specie* sono quelli, che hanno i loro *denominatori* inuguali, come $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$ ec. 104. I.

Frazioni, o rotti primi sono quelli che hanno i loro *numeratori*, *e denominatori*, che sono *numeri primi*, come $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{7}{11}$ ec.

Frazioni, o rotti simili, o equivalenti sono quelli, i di cui *numeratori sono simili parti aliquote, o aliquante*, dei loro *denominatori*, come $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{6}{9}$ ec.

Frazione di Frazione, rotto di rotto, o frazioni seconde è una parte di una *frazione*. 107. I.

Frazioni, o rotti decimali sono quelli che hanno il *denominatore*, che è l'unità accompagnata con dei zeri, come $\frac{3}{10}$, $\frac{6}{100}$, $\frac{15}{10000}$ ec. 110. I.

Frazioni, o rotti decimali primi, secondi, terzi ec. s'intendono così: se nel *denominatore* v'è un sol *zero*, come $\frac{3}{10}$, questa è una *frazione decimale prima*. Se due come $\frac{7}{100}$ è *seconda*, se tre *terza*; e così delle altre. 110. I.

Frazione di frazione di una frazione, ovvero *Rotto di rotto di un rotto*, oppure *frazioni terze, o rotti terzi* s'intende per una parte di rotto di rotto, e per *frazioni, o rotti quarti*, s'intende per una parte di Rotto, o frazioni terze, e così di seguito. 108. I.

Figure, o Caratteri Aritmetici sono quelli, che esprimono le *unità*, come 1, vale un'unità, 2 due, 3 tre, 4 quattro, 5 cinque, *6* sei, 7 sette, 8 otto, *9* nove. *6.* I.

Frutto, interesse, merito, o profitto è quel tanto, che si paga per cento l'anno, per le Mercanzie, o denari che si prendono *a Censo*. 31. II.

Frutto dei frutti è lo stesso che *Censo a capo d'anno*. 34. II.

G

GEOMETRICA RAGIONE, *o Ragione Geometrica* è la comparazione che si fa di due *numeri* per rapporto al numero delle volte, che l'uno contiene una delle *parti aliquote* dell'altro.

Geometrica proporzione, ovvero *Proporzione Geometrica* è una similitudine di *ragioni Geometriche*, dal che si vede, che questi quattro numeri 2, 3, 4, *6*, sono in Geometrica proporzione, perchè la Geometrica ragione di 2 a 3, è simile di quella di 4 a *6*, come pure questi quattro numeri $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{27}$, sono in Geometrica proporzione, perchè la ragione della $\sqrt{2}$ alla $\sqrt{3}$ è uguale a quella della $\sqrt{18}$, alla $\sqrt{27}$.

Geometrica medietà, ovvero *Medietà Geometrica* s'intende tre numeri in *proporzione Geometrica*, come 2, 4, 8.

GEOMETRICA PROGRESSIFNE, ovvero *Progressione Geometrica* è una serie di numeri, che sono in una *continua proporzione* Geo-

Geometrica, come 1. 2. 4. 8. 16. ec. 55. II.

Geometriche ragioni uguali, *o simili*, ovvero *Ragioni Geometriche uguali*, *o simili*, oppure *simili*, *o uguali ragioni Geometriche*, o ancora *uguali*, *o simili ragioni Geometriche*, sono quelle dove i più piccioli *termini* sono *simili parti aliquote*, *o aliquante* dei più grandi, come questa di 3 a 6 è uguale a quest' altra di 4 a 8.

Gnomoni sono quei *numeri intieri*, con ugual eccesso che si vanno continuamente sommando per averne i *numeri Poligoni*, mentre se saranno questi numeri ugualmente differenti l'uno dall'altro, come 1.2.3.4.5., il primo 1, si dice il *primo Gnomone*, il 2, il *secondo*, il 3, il *terzo* ec.

H

HOmologi termini, *o Termini homologi di una ragione*, sono gli *antecedenti* agli *antecedenti*, e i *conseguenti* ai *conseguenti*, dal che si vede che nelle ragioni di 2 a 3, di 4 a 6, di 10 a 15 ec. i termini Homologi sono i conseguenti 3, 6, 15, e gli antecedenti 2, 4, 10.

Hypotenusa, *o Ipotenusa* è il maggiore dei tre numeri d'un *Triangolo rettangolo in numeri*.

I

INugualità di ragione, *o Ragione di inugualità* è quella, che si ritrova fra due numeri inuguali, come la ragione di 5 a 6, ovvero di 6 a 5.

Incommensurabili fra loro, ovvero *Numeri incommensurabili fra loro* sono quelli, la di cui *ragione Geometrica è irrazionale*, come sono i due numeri $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, e ancora 4, $\sqrt{7}$, ed infiniti altri.

Imprestare, vuol dire aggiungere le decine, centinaja ec. nella *somma*, e nella *sottrazione* ai numeri susseguenti. 40. I.

INFILZARE i rotti, vuol dire *sommare* insieme due *rotti* che non sieno d'una stessa unità. 106. I.

Indice, *o esponente di una potestà* è quel numero, che mostra quante volte si moltiplicò un dato numero, onde poi ne provene la data potestà, onde il 2, sarà l'indice del *numero quadrato*, *o seconda potestà*, il 3 del *Cubo*, *o terza potestà*, e così delle altre. 113. I.

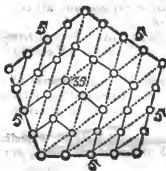
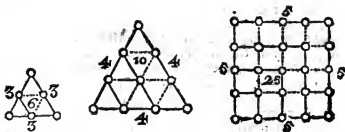
Interesse, *Merito*, *Profitto*, *o Frutto* è quel tanto che si paga per cento l'anno, per le Mercanzie, o denari, che si prendono a *Censo*. 31. II.

Ipotenusa, *o Hypotenusa* è il maggiore dei tre numeri di un *Triangolo rettangolo in numeri*.

L

LAto di un numero figurato è quel numero, che mostra, o esprime le unità che si disporrebbero, o sono disposte nel la-

to

to del poligono, come si vede quì sotto, che 3 è il lato del *numero triangolare* 6; 4 è il lato del *numero triangolare* 10, e così degli altri.

Lati di un triangolo rettangolo in numeri, sono i due numeri più piccioli che lo compongono, come 3, e 4 sono i lati del triangolo rettangolo in numeri 3, 4, 5, e così degli altri.

Lati di un numero diametrale, sono i due più piccioli numeri, cioè gli altri due, fuori del *diametro del numero diametrale*.

Lati di un numero piano, sono quei due numeri, che lo producono; come 2, e 3 sono i lati del *numero piano* 6 ec.

Lati di un numero solido, sono quei tre numeri che lo producono, come 2, 3, 5, sono i lati del *numero solido* 30 ec.

LOGARITMI, sono numeri di una *progressione Aritmetica Naturale*, posti dirimpetto ad altri numeri d'una *progressione Geometrica*, dei quali essi sono chiamati suoi Logaritmi, dove si conosce, che i numeri di questa progressione Aritmetica, 0, 1, 2, 3, 4 ec. sono i Logaritmi dei numeri di questa progressione Geometrica 1, 10, 100, 1000, 10000 ec.

Logistica numerosa, ovvero *Algoritmo* s'intende per le operazioni di *Aritmetica*, cioè *Sommare*, *Sottrarre*, *Moltiplicare*, *Partire*, *ed estraer le Radici*.

Libretto è lo stesso che la *Tavola Pitagorica*.

Leggere un numero, vuol dire enunciare colle parole il suo valore. 10. I.

Lamina dei quadrati, *o quadratica* è una colonna della *Tavola Pitagorica*, in cui sono notati i *quadrati* dei *numeri semplici*. 121. I.

Lamina de' Cubi, *o Cubica* è una colonna della *Tavola Pitagorica*, in cui sono notati *i Cubi* dei *numeri semplici*. 128. I.

M

MEdietà *Aritmetica*, ovvero *Aritmetica medietà*, s' intende tre numeri in *proporzione Aritmetica*, come 2, 5, 8, mentre l' eccesso del secondo 5 sopra il primo 2 è uguale all' eccesso del terzo 8 sopra il secondo 5.

Medietà Geometrica, ovvero *Geometrica Medietà*, s' intende tre numeri in *proporzione Geometrica*, come 2, 4, 8.

Medietà Armonica, ovvero *Armonica Medietà*, s' intende tre numeri in *proporzione Armonica*, come 3, 4, 6,

Medietà quarta, ovvero *quarta medietà* è quella ove il terzo *termine* sta al primo, come l'eccesso del primo sopra il secondo, e l'eccesso del secondo sopra il terzo, come 6, 5, 3.

Medietà quinta, ovvero *quinta medietà* è quella, ove il terzo *termine* sta al secondo, come l'eccesso del primo sopra il secondo, all' eccesso del secondo sopra il terzo, come 41, 36, 16.

Medietà sesta, ovvero *sesta medietà* è quella, ove il secondo *termine* sta al primo, come l'eccesso del primo sopra il secondo, all' eccesso del secondo sopra il terzo, come 6, 4, 1.

Medietà moderna, è quella, dove l' eccesso del primo *termine* sopra il secondo, si chiama *primo termine*, quello del secondo sopra il terzo, si chiama *secondo termine*, e l' eccesso del primo sopra il terzo, si chiama *terzo termine*.

Medietà moderna settima, ovvero *settima medietà moderna*, è quella, ove il terzo eccesso sta al primo, come il secondo al terzo, come 7, 6, 1, ovvero il *primo termine* è sempre uguale alla somma degli altri due.

Medietà moderna ottava, ovvero *ottava medietà moderna*, è quella, ove il terzo eccesso sta al primo, come il *primo termine* al *secondo*, come 6, 4, 3.

Medietà moderna nona, ovvero *Nona medietà moderna*, è quella, ove il terzo eccesso sta al primo, come il *primo termine* al terzo, come 9, 7, 3.

Medietà decima moderna, ovvero *Decima medietà moderna*, è quella, ove il terzo eccesso sta al secondo, come il *secondo termine* al *terzo*, come 7, 6, 4.

MOLTIPLICARE un numero per un altro, vuol dire trovare un terzo numero che contenga tante volte uno dei due numeri, che si moltiplicano, quante sono le unità che contiene l'altro. 41. I.

Moltiplicando, chiamasi quel numero, che si prende tante volte, quante sono le unità dell' altro, che si moltiplica. 42. I.

Moltiplicante, chiamasi quel numero, secondo le unità del quale si prende tante volte l'altro numero che si moltiplica. 43. I.

Moltiplicare, più numeri insieme, vuol dire moltiplicarne prima due di essi insieme, e poi il *prodotto* moltiplicarlo con un altro dei da-

dati; e quest'ultimo *prodotto* con un altro pure dei detti, e così finchè ve ne sono.

Moltiplicazione semplice, o *moltiplicare semplice* è il modo di moltiplicare un *numero semplice* per un altro semplice.

Moltiplicare composto, o *moltiplicazione composta* è il modo di moltiplicare insieme, numeri di diversa specie. 71. I.

Moltiplicare per Scacchiero, o *Baricocolo*, è il moltiplicare secondo l'uso ordinario. 47. I.

Moltiplicare per Scavezzo, vuol dire fare una moltiplicazione in più volte. 48. I.

Moltiplicare colla Tavola Pitagorica, vuol dire fare le moltiplicazioni mediante la detta Tavola. 49. I.

Moltiplicare coi Logoritmi, vuol dire moltiplicare mediante essi Logaritmi. 50. I.

Moltiplicare colla sola somma, vuol dire fare le moltiplicazioni colla sola *sommazione*. 52. I.

Moltiplicare per Crocetta, o per decusazione è una maniera di moltiplicare i numeri in Croce. 53. I.

Moltiplicare per Gelosia, è un modo di moltiplicarein forma di Gelosia. 54. I.

Moltiplicare secondo gli Antichi, è un modo di moltiplicare all'uso degli Antichi. 55. I.

Moltiplicare alla Fiorentina, *o all'indietro*, è un modo di moltiplicare all'uso ordinario, ma principiando all'indietro. 58. I.

Moltiplicare per quadrato, vuol dire moltiplicare in forma di quadrato. 59. I.

Moltiplicare per Circolo, vuol dire moltiplicare in foma di Circolo. 60. I.

Moltiplicare per piramide, *o Triangolo*, vuol dire moltiplicare in forma di piramide, o di triangolo. 61. I.

Moltiplicare per Rombo, vuol dire moltiplicare in forma di Rombo. 62. I.

Moltiplicare per Calice, vuol dire moltiplicare in forma di Calice. 63. I.

Moltiplicare per ripiego, vuol dire moltiplicare in più pezzi. 64. I.

Multiplo di un numero, *o multiplice di un numero*, è un numero più grande, che contiene il più picciolo un certo numero di volte precisamente senza alcuno avanzo. 12. I.

Misura di un numero, è un numero più picciolo, che divide esattamente un altro numero, senza alcun'avanzo; ovvero è un *numero sumultuplo*. 11. I.

Misura comune, ovvero *Comune misura di due*, *o più numeri*, è un numero più picciolo, fuori dell'unità, che li divide, o misura tutti esattamente. Così il 4, è la comune misura di questi

tre numeri 12, 20, 28, perchè li misura esattamente per questi tre 3, 5, 7.

Mezzo proporzionale Aritmetico, è il secondo *termine* di una *proporzione Aritmetica*, quando è composta di soli tre numeri, come 2, 5, 8, dove il 5 è il mezzo proporzionale Aritmetico tra il 2, e l'8.

Mezzi proporzionali Aritmetici, sono quelli posti tra mezzo ai due *termini* estremi di una *progressione Aritmetica*, come questa 1, 2, 3, 4, 5, dove il 2, 3, 4, sono i mezzi proporzionali Aritmetici fra 1, e 5. . 54. II.

Mezzo proporzionale Geometrico, è il secondo *termine* di una *proporzione Geometrica*, quando essa proporzione è *continua*, come 2, 4, 8, dove 4 è il mezzo proporzionale Geometrico fra 2, e 8.

Mezzi proporzionali Geometrici sono quelli posti fra mezzo ai due *termini* estremi di una progressione Geometrica, come di questa 2, 4, 8, 16, 32, 64, dove 4, 8, 16, 32, sono i mezzi proporzionali Geometrici fra 2, e 64. 60. II.

Mezzo proporzionale Armonico, è il secondo termine di una *proporzione Armonica*, come di questa 3, 4, 6, il 4 è il mezzo proporzionale Armonico fra 3, e 6.

Massimo schisatore, è il numero più grande, che esattamente può dividere il *numeratore*, e il *denominatore* di un rotto per *abbassarlo*, o *schisarlo*. 101. I.

Merito, *Profitto*, *Interesse*, o *Frutto*, è quel tanto che si paga per cento l'anno, per le Mercanzie, o denari, che si prendono a Censo. 31. II.

N

NUmero Aritmetico*, ovvero *Aritmetico numero*, è un *numero razionale* qualunque considerato in se indipendentemente da tutti gli altri numeri, come 2, 4, 5 ec.

NUMERO è l'unione di più cose del medesimo genere. 5. I.

Numero intiero, è quello, che significa una, o più cose del medesimo genere, senza subdivisione alcuna, come 25 braccia di Panno, senza alcuna divisione di un'altra.

Numero abbondante, ovvero *abbondante numero*, è quello, che è maggiore di tutte le sue *parti aliquote* prese insieme, come 24, che è maggiore della *somma* 36 di tutte le sue *parti aliquote*, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, e così di molti altri.

Numero rotto, ovvero *Frazione*, è quella, che rappresenta la parte di una unità. 93. I.

Numero rotto improprio, o *Frazione impropria*, è quella, che è più dell'unità, come $\frac{4}{3}$, $\frac{7}{5}$ ec. 96 $\frac{1}{2}$ I.

Nu-

Numero quadrato, vuol dire il *prodotto* di un *numero* moltiplicato in se stesso. 28. I.

Numero Cubo, ovvero *Cubo numero*, vuol dire qualunque *numero* provenuto da un *numero quadrato* moltiplicato nella sua radice. 30. I.

Numero quadrato-quadrato, dicesi quello, che proviene dal *numero Cubo*, moltiplicato nella sua radice. 112. I.

Numero irrazionale; è quello, che non si può esprimere in numeri, come la *Radice quadra* di 18, che è più grande di 4, e meno di 5, la quale non si può esprimere precisamente per qualsivoglia numero mezzano fra i suddetti due.

Numero sordo, è lo stesso che *numero irrazionale*.

Numero incommensurabile, è lo stesso che *numero irrazionale*, o *numero sordo*.

Numero razionale, è quello, che si può esprimere in numeri, come 2, 3, 5, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$ ec.

Numero commensurabile, è lo stesso che *numero razionale*.

Numero multiplo, è un *numero* più grande, che contiene il più picciolo un certo numero di volte precisamente senza alcun avanzo: dalla qual cosa si conosce, che 12 è un numero multiplo del 3, perchè lo contiene esattamente quattro volte.

Numero submultiplo, è un *numero* più picciolo, che si trova compreso un certo numero di volte esattamente nel più grande: dove si conosce, che il 3 è numero submultiplo del 12 perchè resta contenuto dal 12 precisamente quattro volte.

Numero perfetto, è quello, che è uguale a tutte le sue *parti aliquote* prese insieme. 62. II.

Numero mancante, è quello, che è più grande di tutte le sue *parti aliquote* prese insieme: come 15, che è più grande della *somma* 9 di tutte le sue parti aliquote 1, 3, 5.

Numero primo, è quello che non è *misurato* da alcun *numero*, che dalla sola unità, come 2, 3, 5, 7, 11, 17, 19 ec. 26. I.

Numero lineare, è lo stesso, che *numero primo*.

Numero composto è quello, che è *misurato* per qualche altro numero fuori dell'*unità*, come 10, che è misurato per 2, e per 5.

Numero incomposto, è lo stesso che *numero piano*, o *numero lineare*.

Numero Geometrico, è lo stesso, che *numero composto*.

Numero pari, è quello, che diviso per 2 non vi resta alcun avanzo, cioè vien diviso precisamente, come 4, 6, 10 ec. 24. I.

Numero parimente pari, è quello che è divisibile per 4, senza alcun avanzo, come, 8, 12, 16 ec.

Numero imparimente pari, è quello che un *numero impari misura* per un *numero pari*, come 42 che resta misurato dal 7, che è numero impari per 6, che è numero pari.

Numero impari, è quello, che non può essere diviso per 2, senza avanzo, come 3, 9, 15 ec. 25. L

Numero parimente impari, è quello, che un *numero impari* misura per un *numero pari*: come 10, che è misurato dal 5, che è numero impari per 2 che è numero pari.

Numero imparimente impari, è quello, che è misurato da un *numero impari* per un *numero pari*, come 15, che è misurato dal numero impari 3, per il numero impari 5.

Numero ugualmente eguale, è quello, che vien prodotto moltiplicando un *numero* in se stesso, che è lo stesso, che *numero quadrato*.

Numero ugualmente uguale inegualmente, è quello che resta prodotto dalla *moltiplicazione* continua di tre numeri uguali, che è lo stesso che *numero cubo*.

Numero inegualmente ineguale, è un *numero piano* provenuto dalla *moltiplicazione* di due numeri disuguali, come 18, che proviene da , e 6, ovvero da 2, e 9 ec.

Numero barlungo, ovvero *Barlungo numero*, è un *numero piano* provenuto dalla *moltiplicazione*: di due numeri differenti l'uno dall'altro dell'*unità*, come, 6, che proviene da 2, e 3.

Numero parallelogrammo, è un *numero piano* provenuto dalla *moltiplicazione* di due *numeri*, differenti l'uno dall'altro di un numero più grande dell'*unità*, come 48 provenuto da 6, e 8 differenti di 2, ovvero da 2, e 24 differenti di 22, oppure di 4 e 12, differenti di 8.

Numero Oblongo, è lo stesso che *numero inegualmente inuguale*.

Numero piano, è qualunque numero provenuto dalla *moltiplicazione* di due altri qualunque, perciò il *numero quadrato* è ancora *numero piano*.

Numero solido, è qualsivoglia *numero* provenuto dalla *moltiplicazione* di tre altri qualunque, onde il *numero cubo* è ancora *numero solido*.

Numero inegualmente ineguale inegualmente, è un *numero solido* provenuto dalla continua *moltiplicazione* di tre numeri inuguali, come 30, che proviene da 2, 3, 5, che sono inuguali.

Numero egualmente uguale mancante, è un *numero solido* provenuto dalla *moltiplicazione* di due numeri uguali, e da un altro più picciolo di ciascuno degli altri due, come 48 provenuto da 4, 4, 3 li di cui due primi sono uguali fra loro, e il terzo è più picciolo di ciascuno di questi due.

Numero egualmente uguale abbondante, è un *numero solido* provenuto dalla *moltiplicazione* di tre numeri, due uguali e l'altro più grande di ciascuno degli altri due, come 45, che proviene da 3,

3, 5,

3, 5, dove li due primi sono eguali fra loro, e il terzo è più grande di ciascheduno di loro.

Numero Circolare, *o Sferico*, è quello le di cui *potenze* finiscono per uno stesso numero, come è il 5, il di cui *quadrato* è 25, il *Cubo* è 125, e tutte le altre sue potenze finiscono per lo stesso numero 5: tale è ancora il *6*, come si può vedere.

Numero Poligono è quello, che proviene da una continua raccolta di altri numeri. 9. III.

Ovvero il numero poligono è un numero di una tal quantità di *unità*, le quali si possono disporre in un piano di un poligono regolare (cosa sia questo Poligono regolare vedasi nella Geometria) paralellamente ai lati, e al raggio, o al solo lato del medesimo poligono. 7. III.

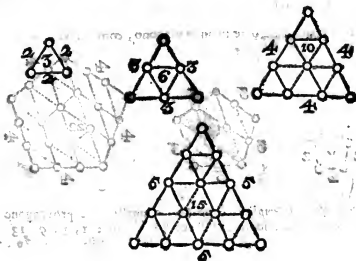
Numero multangolo, è lo stesso che *numero poligono*. 7. III.

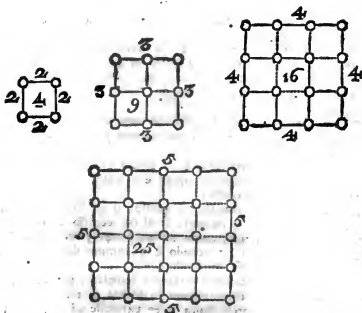
Numero figurato, è lo stesso che *numero poligono*, o *numero multangolo*. 11. III.

Numero poligono semplice, è la *somma* di tanti numeri intieri, quanti si vuole, il primo dei quali è l' *unità*, e crescono in infinito con un uguale eccesso.

Numero triangolare semplice, è quello, o quelli, che provengono dalla continua *somma* di numeri, il di cui eccesso è l'*unità*, e principiano pure dall' unità, come 1, 2, 3, 4, 5 ec., dove il primo triangolo semplice è 1, il secondo è 3, somma dei due numeri 1, e 2, il terzo è *6*, e così degli altri. 10. III.

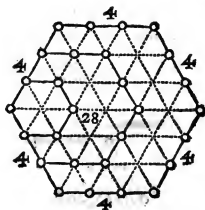
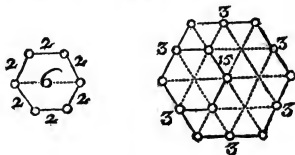
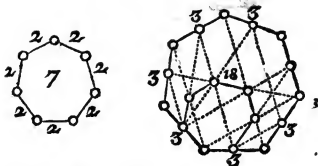
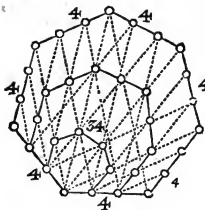
Chiamansi ancora numeri triangoli semplici, perchè possonsi disporre le unità che li compongono in forma di triangolo equilatere con distanze uguali prese sopra linee paralelle ai lati di un triangolo equilatero, come si vede espresso per maggior chiarezza quì sotto. 8. III.

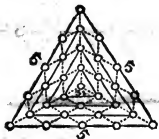
N..

Numero quadrato semplice, è quello, o quelli, che provengono dalla continua *somma* di numeri principianti dall' unità colla differenza 2, come 1, 3, 5, 7, 9 ec. 11. III.

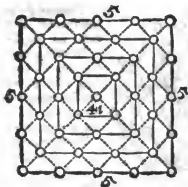
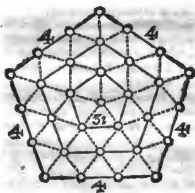
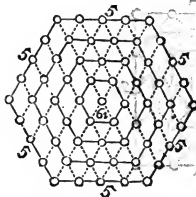
Questi si possono disporre in un quadrato, come si vede quì sotto.

Numero Pentagono semplice, è quello, o quelli che provengono dalla *somma* di altri numeri come sopra coll' eccesso 3: come 1, 4, 7, 10 ec. 12. III.

Questi si possono disporre in un pentagono, come si vede quì sotto.

Numero esagono semplice, è quello, o quelli, che provengono da altri numeri, come sopra, coll' eccesso 4, come 1, 5, 9, 13 ec., e co-

e così degli altri *numeri poligoni*, come si vede espresso quì sotto; che si è fatto l'esagono, e il settagono, e così in infinito.

Numeri Settagoni.

Numero poligono centrale, è un numero uguale alla *somma* dell' *unità*, e del *prodotto* del *numero triangolare semplice*, il di cui *lato* è minore dell'unità, che quella del numero poligono centrale, e il numero dei *lati* del poligono centrale; il quale è così chiamato, perchè rappresenta il numero delle unità, che vi vogliono per riempiere un poligono regolare in distanze uguali prese nei raggi del poligono, e nelle linee paralelle ai raggi, e ai lati del medesimo poligono.

Numero triangolare centrale, può essere, come il seguente, dove il *lato* è 5, e il valore 31, e si trova moltiplicando per 3 il semplice *numero triangolo* 10, il di cui *lato* è 4, aggiungendo un'unità al prodotto 30; e i numeri triangoli centrali per ordine sono 1, 4, 10, 19, 31, 46, 64, 85 ec. e quì sotto si vede disposto in figura il numero triangolo centrale di 31.

Numero quadrato centrale, è come il seguente, il di cui lato è 5, e il valore 41, il qual valore si trova moltiplicando per 4, il *numero triangolare semplice* 10, il di cui *lato* è 4, aggiungendo 1 al *prodotto* 40, come si vede quì appresso, e i numeri quadrati centrali per ordine sono 1, 5, 13, 25, 41, 61, 85 ec.

Nu-

Numero pentagono centrale, è come il ſeguente, il di cui lato è 4; e il ſuo valore 31, che ſi trova moltiplicando per 5 il *numero triangolo ſemplice 6*, il di cui *lato* è 3 aggiungendo 1. al *prodotto* 30, come queſto quì ſotto, e i numeri pentagoni centrali per ordine ſono 1. *6.* *16.* 31. 51. *76.* 106 ec.

Numero eſagono centrale, è come il ſeguente, il di cui lato è 5, e il ſuo valore è *61*, che ſi trova moltiplicando per *6* il *numero triangolare* 10, il di cui *lato* è 4, aggiungendo al prodotto *60* un' unità: i numeri eſagoni centrali per ordine ſono 1, 7, 19, 37, *61*, *91*, 127 ec.

Numero piramidale tronco, è il rimanente d'ogni *numero piramidale*, da cui si sia levata l'unità.

Numero piramidale due volte tronco, è quello, dal quale si sono levati i primi due *numeri poligoni* che lo compongono, cioè l'unità, ed ancora il suo susseguente numero poligono.

Numero piramidale tre volte tronco, è quello, dal quale si sono levati i tre primi *numeri poligoni*, cioè l' unità, e i due altri susseguenti, nel qual modo deesi intendere degli altri di seguito.

Numero diametrale, è un *numero piano* uguale al doppio dell' *Aria di un triangolo rettangolo in numeri*, dove si vede, che 12 è numero diametrale del *triangolo rettangolo in numeri* 3, 4, 5.

Numero doppio in potenza d' un altro, è un *numero irrazionale*, il di cui *quadrato* è doppio dell'altro numero come $\sqrt{8}$, a riguardo di 4, ovvero la $\sqrt{6}$, a riguardo di 3 ec.

Numero supersolido, è quello provenuto dalla *moltiplicazione* di un numero qualunque, cinque volte in se stesso. 112. I.

Numeri amicabili, ovvero *amicabili numeri*, sono due numeri intieri, ciascheduno dei quali è uguale a tutte le *parti aliquote* dell'altro prese insieme 63. II.

Numeri equimultipli, sono numeri che si contengono ugualmente, cioè a dire tante volte gli uni che gli altri loro *summultipli*, dove si conosce, che li due numeri 12, 6 sono *equimultipli* dei loro *summultipli* 4, e 2, perchè ciascuno contiene il suo summultiplo tre volte.

Numeri primi tra di loro, sono quelli che non hanno altra *comune misura* che l'unità. 27. I.

Numeri composti tra di loro, sono quelli che hanno una *comune misura*, oltre dell'*unità*, come 4, 10, la di cui comune misura, è 2, e così 2, 6, 8, la di cui comune misura è pure 2, e così degli altri.

Numeri piramidali, sono quelli, dove considerati i *numeri poligoni* per ordine, come tanti *Gnomoni*, ponendo sempre l'unità per primo, aggiungendo insieme li due primi, poi i tre primi, i quattro primi, e così di seguito, ne provengono i numeri piramidali.

Numeri piramidali triangolari, sono quelli che si formano dalla continua *somma* dei *numeri triangoli*, *semplici* per ordine: così per mezzo di questi numeri triangolari semplici, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66 ec. ne provengono questi numeri piramidali trian-

triangolari 1, 4, 10, 20, 35, 44, 56, 120, 165, 220, 286 ec.

Numeri piramidali quadrati, sono quelli formati dalla continua *somma* dei *numeri quadrati semplici* per ordine: Così con questi numeri quadrati semplici 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 ec. si hanno questi numeri piramidali quadrati 1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, 204, 285, 385 ec.

Numeri piramidali pentagoni, sono quelli formati dalla continua *somma* dei *numeri pentagoni semplici* per ordine: così con questi numeri pentagoni semplici 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, 117 ec. si trovano questi numeri piramidali pentagoni 1, 6, 18, 40, 75, 126, 196, 288, 405 ec.

Numeri piramidali esagoni, sono quelli formati dalla continua *somma* dei *numeri esagoni semplici* per ordine: onde con questi numeri esagoni semplici 1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120 ec., si trovano questi numeri piramidali esagoni 1, 7, 22, 50, 95, 161, 257, 372 ec., nel qual modo deesi intendere di qualsivoglia altro numero piramidale.

Numeri piramido-piramidali, sono quelli dove considerati i *numeri piramidali* per ordine, come tanti *gnomoni* ponendo sempre l'unità per primo, aggiungendo insieme i due primi, i tre primi, i quattro primi ec. ne vengono i numeri piramido--piramidali.

Numeri piramido--piramidali triangolari, sono quelli che restano formati dalla continua *somma* dei *numeri piramidali triangolari* presi per ordine: onde questi numeri piramidali triangolari 1, 4, 10, 20, 35 ec. danno questi numeri piramido--piramidali triangolari 1, 5, 15, 35, 70 ec.

Numeri piramido--piramidali quadrati sono quelli formati dalla continua *somma* dei *numeri piramidali quadrati* per ordine, onde questi 1, 5, 14, 30, 35, 91, che sono numeri piramidali quadrati, danno questi numeri piramido--piramidali quadrati 1, 6, 20, 50, 105, 196 ec.

Numeri generatori dei *numeri poligoni*, *o figurati*, *o piramidali*, *o piramido--piramidali* ec. sono quelli presi nel principio per fare i detti numeri, che ordinariamente è l'unità, benchè si possa prendere per principio un altro numero, nel qual caso quello sarà il genitore. 12. III.

Numeri generatori di un triangolo, rettangolo in numeri, possono essere quattro numeri, che trovansi levando le *radici quadrate* dalla metà della *somma*, e dalla metà della differenza dell'*ipotenusa*, e di uno dei due lati del *triangolo rettangolo in numeri*: dove si conosce, che i numeri generatori di questo trriangolo rettangolo in numeri 28, 45, 53, sono 7, 2, ovvero $\sqrt{\frac{81}{2}}$, $\sqrt{\frac{25}{2}}$.

Numeri piani simili, sono quelli, che hanno i loro lati proporzionali, onde questi due numeri 6, 54, sono simili, perchè i due lati

ti 2, e 3, del primo sono proporzionali ai due lati *6*, e *9* del secondo.

Numeri solidi simili, sono quelli, che hanno i loro lati proporzionali, onde questi due 30, 240, sono simili, perchè i tre lati 2, 3, 5, del primo 30, sono proporzionali ai tre lati 4, *6*, 10 del secondo 240.

Numeri commensurabili in potenza, sono quelli, i di cui *quadrati* sono *commensurabili* fra di loro, come $2 \sqrt{3}$, perchè i loro quadrati 4, e 3 sono commensurabili fra loro: e così $\sqrt{\sqrt{8}}$, $\sqrt{\sqrt{50}}$, perchè i loro quadrati $\sqrt{8}$, $\sqrt{50}$, sono commensurabili fra loro, essendo nella ragione dei due numeri razionali 2, e 5.

Numeri incommensurabili in potenza, sono due *numeri irrazionali*, i di cui quadrati non sono *commensurabili* fra loro, come $\sqrt{2}$, $\sqrt{\sqrt{5}}$ e così $2 \sqrt{\sqrt{6}}$ ec.

Numeri proporzionali, sono quelli, che compongono una proporzione qualunque.

Numeri proporzionali Aritmetici, o numeri *Aritmeticamente proporzionali*, sono quelli che sono in proporzione Aritmetica, e scrivonsi così 2.5.:*6*.3.

Numeri proporzionali Geometrici, *o numeri Geometricamente proporzionali*, sono quelli che sono in *proporzione Geometrica*, come 3.7:: *6*.14. 20. I.

Numeri proporzionali Armonici, *o numeri Armonicamente proporzionali*, sono quelli che sono *in proporzione Armonica*, come 8.*6*.5.4.

Numeri Romani, sono quelli che si fanno colle lettere majuscole nelle memorie, e monumenti pubblici. 33. I.

Numerare, *ovvero contare*, non è altra cosa che unire più unità in una sola idea.

Numerazione è l'espressione di un numero proposto per le figure, o caratteri che gli sono proprj. 32. I.

Nona medietà moderna, ovvero *medietà nona moderna* è quella, ove il terzo eccesso stà al primo, come il primo *termine* al terzo: come *9*. 7. 3.

O

OBlongo *numero*, *o Numero oblongo*, è lo stesso che *Numero inegualmente ineguale*.

Ottava medietà moderna, ovvero *Medietà ottava moderna*, è quella, ove il terzo eccesso sta al primo, come il *primo termine* al secondo; come *6*. 4 3.

P

PROPORZIONE ARITMETICA, ovvero *Aritmetica proporzione*, cioè quattro *numeri Aritmeticamente proporzionali* sono due *ragioni Aritmetiche simili*, per denotare le quali si scrivono così *6*.4.:10.8.

Pro-

Proporzione Aritmetica continua, ovvero *Aritmetica proporzione continua*, è una ſimilitudine di ragioni Aritmetiche, come 1, 2, 3, 4 ec. ovvero 1, 3, 5, 7 ec. 44. II.

PROPORZIONE ARMONICA, ovvero *Armonica proporzione*, ſono tre numeri, in tal maniera, che il primo ha la medeſima *proporzione Geometrica* al terzo, che ha la differenza tra il primo e il ſecondo, alla differenza tra il ſecondo, e il terzo. 67. II.

PROPORZIONE GEOMETRICA, ovvero *Geometrica proporzione* è una ſimilitudine di ragioni Geometriche, dal che ſi vede, che queſti quattro numeri 2. 3 :: 4. 6, ſono in Proporzione Geometrica, perchè la *ragione Geometrica* di 2 a 3 è ſimile di quella di 4 a 6, come pure queſti quattro numeri $\sqrt{2}.\ \sqrt{3} :: \sqrt{18},\ \sqrt{27}$, ſono in proporzione Geometrica, peechè la ragione della $\sqrt{2}$, alla $\sqrt{3}$ è uguale a quella della $\sqrt{18}$, alla $\sqrt{27}$, che è la ſteſſa che quella di $3\sqrt{2}$ a $3\sqrt{3}$.

Proporzione razionale, è quella, ove l'una delle due ragioni uguali è *razionale*, come 2. 3 :: 4. 6, ovvero queſta $\sqrt{2}.\sqrt{8} :: \sqrt{3}.\sqrt{12}$.

Proporzione irrazionale, è quella, ove l'una delle due ragioni uguali è *irrazionale*, come $2.\sqrt{6} :: \sqrt{12}.\sqrt{18}$, oppure queſta $\sqrt{2}.\sqrt{6} :: \sqrt{5}.\sqrt{15}$.

Proporzione di ugualità ben ſituata, è quando vi ſono più di due *termini* in un luogo, ed altrettanti *proporzionali* in un altro, e che ſi comparano nel medeſimo ordine, quelli poſti in un luogo, e quelli poſti nell'altro. Come ſe in un luogo foſſero queſti tre termini 2, 3, 9, e nell'altro queſti tre 4, 6, 18 proporzionali ai precedenti, di modo che ſia 2 a 3, come 4 a 6, e 3 a 9, come 6 a 18.

Proporzione di egualità mal ſituata, è quando vi ſono più di due numeri in un luogo, ed altrettanti proporzionali ai precedenti in un altro, e che ſi comparino con ordine differente. Come ſe in un luogo foſſero queſti tre numeri 2, 3, 9, e nell'altro queſti tre altri 8, 24, 36, proporzionali ai tre precedenti 2, 3, 9 con un ordine differente, di modo, che ſia 2 a 3, come 24 a 36, e 3 a 9, come 8 a 24.

Proporzione per ragione alterna, detta *permutando*, è quando ſi paragonano gli *antecedenti* di due ragioni uguali l'uno con l'altro, come di queſta proporzione 2. 3 :: 4. 6, ſi dirà 2. 4 :: 3. 6. Queſto modo tien luogo ancora nelle *proporzioni Aritmeticbe*.

Proporzione per ragione converſa detta *invertendo* è una comparazione dei *conſeguenti* di due ragioni uguali ai ſuoi *antecedenti*. Come ſe ſarà 2. 3 :: 4. 6, ſi dirà 3. 2 :: 6. 4; e queſto modo ancor eſſo tien luogo nelle *proporzioni Aritmeticbe*.

Proporzione per compoſizion di ragione detta *Componendo* è una comparazione dell'*antecedente*, e del *conſeguente* inſieme uniti al ſo-

ſolo *conſeguente* di due *ragioni uguali*, come 2. 3 :: 4. 6, ſi dirà 5. 3:: 10. 6.

Proporzione per diviſion di ragione, detta *dividendo*, è una comparazione dell'eccesso dell'*antecedente* ſopra il *conſeguente* al medeſimo conſeguente in due *ragioni uguali*: come 3. 2:: 12. 8, che ſarà 1. 2:: 4. 8.

Proporzione per converſion di ragione, è la comparazione dell'*antecedente* alla differenza dell'antecedente, e del *conſeguente* di due ragioni uguali: come 2. 3:: 8. 12 ſarà 2. 1:: 8. 4.

Proporzioni continue, ſono quelle, i di cui *termini medii* fanno uffizio di *antecedenti*, e di *conſeguenti*: come ÷ 2, 6, 18, 54, perchè non ſolamente, come ſta 2 a 6, così ſta 18 a 54, ma come 2 a 6, così 6 a 18, e come 6 a 18, così 18 a 54. 22. I.

Proporzioni diſcontinue, *o diſcrette*, ſono quelle, ove i termini medj non ſi poſſono prendere, come *antecedenti*, *e conſeguenti*, dal che ſi conoſce, che queſta *proporzione Geometrica* è diſcretta 2. 4:: 3. 6, mentre benchè 2 ſtia a 4, come 3, a 6, niente di meno 2 non ſtà a 4, come lo ſteſſo 4 a 3. Ciò s' intende ancora della proporzione Aritmetica. 23. I.

Proporzionali continui, *o continui proporzionali*, ſono i numeri in proporzione continua Aritmetica, e Geometrica, come queſti ÷ 2, 4, 8, 16 ec. che ſono in proporzione continua Geometrica, ovvero 2, 4, 6, 8 ec. che ſono in proporzione continua Aritmetica.

Proporzionalità, è la proporzione che ſi trova fra due *ragioni Geometriche*, e i loro *denominatori*, ovvero fra quattro ragioni Geometriche proporzionali, dalla qual coſa è chiaro eſſervi proporzionalità fra queſte due ragioni 2 a 3, e 4 a 5, e i loro denominatori $\frac{2}{3}$, e $\frac{4}{5}$, ovvero 5, 6.

Progreſſione è una ſerie di quantità, che hanno fra di loro qualche ſorta di rapporto, o ragione ſimile.

PROGRESSIONE ARITMETICA, ovvero *Aritmetica progreſſione*, è una ſerie, o ſeguito di numeri che ſono in una *continua proporzione Aritmetica*, come 1, 2, 3, 4, 5 ec. ovvero 1, 3, 5, 7, 9 ec. 44. II.

Progreſſione Aritmetica naturale, ovvero *Aritmetica progreſſione naturale*, è quella, che principia dall'unità, colla differenza di una unità, così 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ec. 46. II.

Progreſſione Aritmetica naturale pari, ovvero *Aritmetica progreſſione naturale pari*, è quella, che principia da 2 colla differenza 2, così 2, 4, 6, 8 ec. 47. II.

Progreſſione Aritmetica naturale impari, ovvero *Aritmetica progreſſione naturale impari*, è quella, che principia dall'unità, colla differenza 2, così 1, 3, 5, 7 ec. 48. II.

Pro-

Progressione Aritmetica crescente, o ascendente, ovvero *Aritmetica progressione crescente, o ascendente*, è quella, che nel continuarla sempre cresce, come questa 1, 4, 7, 10, 13 ec. 50. II.

Progressione Aritmetica decrescente, o descendente, ovvero *Aritmetica progressione decrescente, o descendente*, è quella, che nel continuarla sempre si diminuisce, come questa 15, 13, 11, 9 ec. 51. II.

PROGRESSIONE GEOMETRICA, o Geometrica progressione, è una serie di numeri, che sono in una continua *proporzione Geometrica*, come 1, 2, 4, 8, 16, 32 ec. 55. II.

Progressione Geometrica crescente, o ascendente, è quella, che sempre va crescendo, come 2, 4, 8, 16, 32, 64 ec. 56. II.

Progressione Geometrica decrescente, o discendente, è quella che va diminuendo, come 32, 16, 8, 4, 2 ec. 57. II.

Parte di un numero è un *numero* qualunque più piccolo; onde si conosce che 3, 4, 5 sono parti di 7.

Parte aliquota, ovvero *aliquota parte* d'un *numero*, è un numero più picciolo, che è compreso in un più grande un certo numero di volte, senza avanzo. 15. I.

Parti aliquote simili, ovvero *simili parti aliquote*, sono quelle, che sono ugualmente contenute dai loro *multipli*: onde si conosce che questi due numeri 3, e 5 sono parti aliquote simili di questi due 18, 30, perchè 3 è contenuto 6 volte nel suo multiplo 18, come parimente 5 è contenuto 6 volte nel suo multiplo 30.

Parte aliquanta, ovvero *aliquanta parte* di un *numero*, è un numero più picciolo, il quale è contenuto nel più grande un certo numero di volte non esattamente, ma vi rimane qualche cosa. 16. I.

Parti aliquante simili, ovvero *simili parti aliquante*, sono numeri che contengono ugualmente delle simili parti aliquote del loro *Tutto*; così si conosce, che questi due numeri 9, 18 sono *parti simili aliquante* di questi due 12, 24, perchè 9 contiene tre volte il quarto di 12 che è 3, e parimente 18 contiene tre volte il quarto di 24 che è 6.

Primo termine di qualsivoglia *medietà* fuori delle tre medietà, cioè Aritmetica, Geometrica, e Armonica, è quello; che è il più grande degli altri due.

Primo termine di una medietà moderna, è l'eccesso del primo termine sopra il secondo.

Prima figura di un numero composto di molte figure, è l'ultima posta a destra. 7. I.

PARTIRE, DIVIDERE, o DIVISIONE, è il modo di trovare quanto un *numero* capisce in un altro. 66. I.

Partire, o dividere per colonna, o per testa, è quella divisione che si può fare in una sol riga. 66 $\frac{1}{2}$, I.

Partire, o dividere per danda alla lunga, vuol dire la diviſione di quei *numeri*, che non ſi poſſono dividere in una ſol riga. 67. I.

Partire, o dividere per danda alla coſta, vuol dire dividere un *numero* con maggior brevità della danda alla lunga. 68. I.

Partire, o dividere di diverſa ſpecie, vuol dire dividere delle quantità che ſieno di diverſa ſpecie. 70. I.

Partire, o dividere mediante la Tavola Pitagorica, vuol dire nel far la diviſione ſervirſi della Tavola Pitagorica. 72. I.

Partire, o dividere mediante i Logaritmi, vuol dire nel fare la diviſione ſervirſi dei Logaritmi. 73. I.

Partire, o dividere all'uſo Oltramontano, vuol dire dividere nel modo che uſano i Popoli poſti di là dai Monti. 74. I.

Partire, o dividere per Battello, vuol dire fare la diviſione in forma di Battello. 75. I.

Partire, o dividere per Galea, vuol dire fare la diviſione in forma di Galea. 76. I.

Partire, o dividere per ripiego, vuol dire partire in più volte. 77. I.

Prova del 7, 9 ec. vuol dire eſaminare ſe una operazione Aritmetica fu ben fatta mediante i numeri 7, 9 ec. 83. I.

Prova del ſommare, vuol dire, conoſcere ſe la ſomma fu ben fatta. 79. I.

Prova del ſottrarre, vuol dire conoſcere ſe la ſottrazione fu ben fatta. 84. I.

Prova del moltiplicare, vuol dire conoſcere ſe la *moltiplicazione* fu fatta a dovere. 87. I.

Prova del partire, o dividere, vuol dire conoſcere ſe la diviſione fu ben fatta. 90. I.

Provare ſe le operazioni Aritmetiche ſieno fatte a dovere, vuol dire far l'eſame ſopra dette operazioni per conoſcere ſe furono ben fatte. 111. fino 112 ec. I.

Provare la ſomma colla ſteſſa ſomma, vuol dire mediante la ſomma conoſcere ſe la ſomma fu ben fatta. 80, 81. I.

Provare la ſomma colla moltiplicazione, vuol dire mediante la moltiplicazione conoſcere, ſe la ſteſſa ſomma fu ben fatta. 82. I.

Provare la ſomma colle prove del 7, 9 ec., vuol dire conoſcere, mediante il 7, 9 ec. ſe la ſomma fu fatta a dovere. 83. I.

Provare la ſottrazione, mediante la ſteſſa ſottrazione, vuol dire col mezzo della ſottrazione conoſcere ſe la ſottrazione fu ben fatta. 85. I.

Provare la ſottrazione, colle prove del 7, 9 ec. vuol dire conoſcere, mediante il 7, 9 ec. ſe la ſottrazione fu ben fatta. 86. I.

Provare le moltiplicazioni, mediante la ſottrazione, e la moltiplicazione, vuol dire coll'ajuto della *ſomma*, e della *moltiplicazione*, co-

conoscere se la moltiplicazione fu ben fatta. 88. I.

Provare la moltiplicazione, colle prove del 7, 9 ec., vuol dire conoscere, mediante il 7, 9 ec. se la *moltiplicazione* fu ben fatta. 89. I.

Provare la divisione, colla stessa divisione, vuol dire conoscere se la divisione fu ben fatta, coll'ajuto della stessa divisione. 91. I.

Provare la divisione, colle prove del 7, 9 ec. vuol dire conoscere mediante il 7, 9 ec. se la divisione fu ben fatta. 92. I.

Profitto, interesse, merito, o frutto, è quel tanto che si paga per cento l'anno, per le mercanzie, o denari che si prendono a censo. 31. II.

Profitto dei profitti, è lo stesso, che *Censo a capo d'anno*. 34. II.

Pratica Aritmetica, ovvero *Aritmetica pratica*, è quella che insegna l'*Arte* di computare. 3. I.

Prodotto, vuol dire il *numero* che proviene dalla *moltiplicazione* di due altri numeri. 44. I.

Potestà, Potenze, o Dimensioni, sono tutti quei *prodotti*, che si possono avere da qualsivoglia *numero* moltiplicandolo continuamente per lo stesso numero; onde se si sarà moltiplicato due volte, come 2 via 2, che fa 4, questo 4, che è il *quadrato* chiamasi *seconda potestà*, il detto 4 moltiplicato per lo stesso 2 fa 8, che è *numero cubo*, chiamasi *terza potestà*, se questo 8 si moltiplica per 2, il 16, che ne proviene, sarà la *quarta potestà*, e così di seguito. 112. I.

Prezzo medio nelle *alligazioni*, è il valor mezzano, col quale si vogliono pagare le Merci. 23. II.

Permutazione, vuol dire, di più cose sapere, quante volte possonsi mutare di luogo, in modo che sempre ne nasca diverso ordine. 2.3. III.

Q

QUarta medietà, ovvero *medietà quarta*, è quella, ove il terzo *termine* sta al primo, come l'eccesso del primo, sopra il secondò, all'eccesso del secondo sopra il terzo, come 6, 5, 3.

Quinta medietà, ovvero *medietà quinta*, è quella, ove il terzo *termine* sta al secondo, come l'eccesso del primo sopra il secondo, all'eccesso del secondo sopra il terzo, come 41, 36, 16.

Quadrato, o numero quadrato, vuol dire il *prodotto* di qualunque numero moltiplicato in se stesso. 28. I.

Quadrata radice, cioè *Radice quadrata*, vuol dire quel *numero* che si è moltiplicato in se stesso per averne un *numero quadrato*. 29. I.

Quadrati Magici, sono certi quadrati con alcune Caselle piene di numeri disposti in modo, che le loro *somme, e moltiplicazioni* prese per ogni lato del quadrato, come ancora per le diagonali sono uguali. 64. II.

Quadrati Magici pari, sono quelli che hanno una quantità di Caselle in numero pari. 55. II.

Quadrati Magici impari, sono quelli, che hanno una quantità di Caselle in numeri impari. 65. II.

Quadrati Magici in progressione Aritmetica, sono quelli che hanno i loro numeri in *proporzione Aritmetica*. 64. II.

Quadrati Magici in progressione Geometrica, sono quelli che hanno i loro numeri in *proporzione Geometrica*, 66. II.

Quadrati Magici in progressione Armonica, sono quelli che hanno i loro numeri in *proporzione Armonica*. 68. II.

Quoziente, vuol dire quel numero che mostra quanto di due dati numeri uno capisce nell' altro. 66. I.

R

R*Agione in numeri*, è la comparazione che si fa di due numeri fra di loro per rapporto alla loro quantità. 17. I.

Ragione Aritmetica, ovvero *Aritmetica ragione* è la comparazione che si fa di due numeri per rapporto all' eccesso del più grande sopra il più picciolo, ovvero è quello che manca al più picciolo per uguagliare il più grande, quando sono inuguali, ovvero all' egualità dei due numeri quando sono uguali.

Ragione Aritmetica razionale, ovvero *Aritmetica ragione razionale*, è quella, dove li due *termini* sono *razionali*, come la ragione di 2 a 3.

Ragiooe Aritmetica irrazionale, ovvero *Aritmetica ragione irrazionale*, è quella, dove li due *termini* non sono razionali, come la ragione di 2 alla $\sqrt{5}$, e la ragione della $\sqrt{2}$, alla $\sqrt{5}$, e così delle altre.

Ragione Geometrica, o *Geometrica ragione*, è la comparazione che si fa di due numeri per rapporto al numero delle volte che l'uno contiene una delle *parti aliquote dell' altro*.

Ragione di egualità, o *egualità di ragione*, è quella, che si trova fra due numeri uguali, come la ragione di 2 a 3, di 3 a 3 ec. 18. I.

Ragione d' inugualità, o *inugualità di ragione*, è quella, che si trova fra due numeri inuguali, come la ragione di 5 a 6, ovvero di 6 a 5 ec.

Ragione Geometrica più grande di un' altra, è quella, dove l'*antecedente* contiene più di *parti aliquote* del suo *conseguente*, che l' antecedente dell' altre non ne contiene di *parti aliquote simili* del suo conseguente; onde si conosce che la ragione di 10 a 4 è più grande che quella di 3 a 2, perchè l' antecedente 10 contiene cinque metà del suo conseguente 4, e che l' antecedente 3 non contiene che tre metà del suo conseguente 2.

Ragione Geometrica più picciola di un' altra, è quella, dove l'*antecedente* contiene meno di *parti aliquote* del suo *conseguente*, che l' antecedente dell' altra ne contiene delle *parti aliquote simili* del suo con-

conseguente, come la ragione di 3 a 2 è più picciola di quella di 7 a 4, perchè l'antecedente 3 contiene tre metà del suo conseguente 2, e l'antecedente 7 contiene più di tre metà del conseguente 4.

Ragione di più grande ineguálità è quella, ove l'*antecedente* è più grande che il *conseguente*, dove si conosce che la ragione di 3 a 2, è una ragione di più grande ineguálità, perchè l'antecedente 3, è più grande del conseguente 2.

Ragione di più picciola ineguálità, è quella, ove l'*antecedente* è più picciolo che il *conseguente*: così si conosce che la ragione di 2 a 3, è una ragione di più picciola ineguálità, perchè l'antecedente 2, è più picciolo del suo conseguente 3.

Ragione superparticolare, o *Superparticolare ragione*, è quella, ove l'*antecedente* contiene una volta il *conseguente*, e di più una *parte aliquota* del medesimo conseguente. *61. II.*

Ragione sesquialtera, o *Sesquialtera ragione*, è una ragione *superparticolare*, dove l'*antecedente* contiene il *conseguente* una volta e mezza, come la ragione di 3 a 2 ec.

Ragione sesquiterza, o *sesquiterza ragione* è quella, dove l'*antecedente* contiene il *conseguente* una volta, e un terzo, come la ragione di 8 a *6* ec.

Ragione sesquiquarta, o *Sesquiquarta ragione*, è quella, dove l'*antecedente* contiene il *conseguente* una volta, e un quarto; come la ragione di 15 a 12; e così delle altre, cioè *Sesquiquinta*, *Sesquisesta* ec.

Ragione multipla è quella, ove l'*antecedente* contiene il *conseguente* più di una volta esattamente.

Ragione dupla, è quella, dove l'*antecedente* contiene due volte il *conseguente*.

Ragione tripla, è quella, dove l'*antecedente* contiene tre volte il *conseguente* *quadrupla*; quando lo contiene quattro volte, e così delle altre.

Ragione surparciente, o *surparciente ragione*, è quella, ove l'*antecedente* contiene una volta il *conseguente*, e di più una *parte aliquanta* del medesimo conseguente.

Ragione Surbiparciente terza, o *Surbiparciente terza ragione*, è quando l'*antecedente* contiene il suo *conseguente* una volta, e due terzi, come quella di 20 a 12 ec. se una volta e tre quarti, chiamasi *surbiparciente quarta*, come 21 a 12, se una volta, e quattro quinti *surbiparciente quinta*, come quella di 9 a 5, e così delle altre.

Ragione multipla surparticolare, è quella, ove l'*antecedente* contiene più volte il *conseguente*, e di più una *parte aliquota* del medesimo conseguente.

Ragione dupla sesquialtera, è quella, ove l'*antecedente* contiene

due

due volte il *conseguente* con di più la metà del medesimo conseguente come 15 a 6, se l'antecedente contiene tre volte il conseguente, e ancora la terza parte del medesimo conseguente, la ragione si chiama *tripla sesquialtera*, come quella di 20 a 6. Se l' antecedente contiene quattro volte il conseguente, e ancora una quarta parte del medesimo conseguente, la ragione chiamasi *quadrupla sesquialtera*, come quella di 17 a 4, e così delle altre.

Ragione multipla surparciente, è quella, ove l'*antecedente* contiene più volte il *conseguente*, e di più una *parte aliquanta* del medesimo conseguente. Se l' antecedente contiene due volte il conseguente, e ancora i due terzi del medesimo conseguente, questa ragione si chiama *dupla surbiparciente terza*, come la ragione di 8 a 3. Se l' antecedente contiene tre volte il conseguente, e ancora tre quarti del medesimo conseguente, la ragione chiamasi *tripla surtriparziente quarta*, come quella di 15 a 4. Se poi l' antecedente contiene quattro volte il conseguente, e ancora quattro quinti del medesimo conseguente, la ragione si chiama *quadrupla surquadruparziente quinta*, come quella di 24 a 5, e così delle altre.

Ragione sumultipla, è quella, ove l' *antecedente* è contenuto esattamente nel *conseguente* più di una volta: e se è contenuto due volte, la ragione chiamasi *sudupla*, come 3 a 6, e se è contenuto tre volte *sutripla*, come 2 a 6. Se quattro volte suquadrupla, come 3 a 12, e così delle altre.

Ragione susurparticolare, è quella, ove il *conseguente* contiene una volta l' *antecedente*, e di più una *parte aliquota* del medesimo antecedente: e se questa parte aliquota è una metà, allora la ragione si chiama *susesquialtera*, come 2 a 3. Se la detta parte aliquota è un terzo, allora si chiama *susesquiterza*, come 6 a 8. Se poi la parte aliquota è un quarto, la ragione chiamasi *susesquiquarta*, come la ragione di 12 a 15, e così delle altre.

Ragione susurparciente, è quella, ove il *conseguente* contiene una volta l' *antecedente*, e di più una *parte aliquanta* del medesimo antecedente. Se questa parte aliquanta è due terzi, allora la ragione chiamasi *Susurbiparciente terza*, come 3 a 5. Se è tre quarti, chiamasi *susurtriparciente quarta*, come 4 a 7. Se poi è quattro quinti, chiamasi *susurquadurparciente quinta*, come 5 a 9, e così delle altre.

Ragione sumultipla surparticolare, è quella, ove il *conseguente* contiene più volte l' *antecedente*, e di più una *parte aliquota* del medesimo antecedente. Se il consegnente contiene due volte l' antecedente, e ancora la metà del medesimo antecedente, allora questa ragione chiamasi *sudupla sesquialtera*, come 2 a 5. Se il conseguente contiene tre volte l' antecedente, e ancora la terza parte del medesimo antecedente, la ragione chiamasi *sutripla sesquiterza*,

co-

come 3 a 10; ma se l'antecedente contiene quattro volte il conseguente, e ancora una quarta parte del medesimo antecedente, chiamasi *suquadrupla sesquiquarta*, come 14 a 17, e così delle altre.

Ragione sumultipla surparciente, è quella, ove il *conseguente* contiene più volte l'*antecedente*, e di più una *parte aliquanta* del medesimo antecedente: e se il conseguente contiene due volte l'antecedente, ed ancora i due terzi del medesimo antecedente, allora questa ragione si chiama *sudupla surbiparciente terza*, come la ragione di 3 a 8: e se il conseguente contiene tre volte l'antecedente, e ancora tre quarti del medesimo antecedente, la ragione si dice *sutripla sutriparciente quarta*, come 4 a 15: ma se il conseguente contiene quattro volte l'antecedente, e ancora quattro quinti del medesimo antecedente, la ragione dicesi *suquadrupla surquadruparciente quinta*, come la ragione di 5 a 24, e così delle altre.

Ragione Geometrica razionale, è quella, alla quale se ne può dare un'altra simile in numeri noti, come la ragione di *6* a *9*, la quale è uguale a quella di due *numeri razionali*, così la ragione di 2 alla $\sqrt{8}$, che è uguale a quella dei due numeri razionali 1, e 2.

Ragione Geometrica irrazionale, è quella, alla quale non se ne può dare un'altra uguale in *numeri razionali*: tale è la ragione di 2 alla $\sqrt{5}$, e così la ragione della $\sqrt{5}$, alla $\sqrt{6}$, ma la ragione della $\sqrt{27}$, alla $\sqrt{12}$ è razionale, perchè è uguale a quella di 3 a 2.

Ragione data, è quella, alla quale se ne può dare un'altra uguale.

Ragione Armonica, o *Armonica ragione*, è la comparazione di due *numeri razionali*, in tanto che eglino sono applicati a misurare l'armonia del suono nella Musica.

Ragione senza alcun'altra specificazione deesi sempre intendere per la *ragione Geometrica*.

Ragione dupla di due ragioni, s'intende quella fra tre *numeri* in *proporzione continua*, come 2, 4, 8 dove la ragione di 2 a 8, si dice dupla delle due ragioni di 2 a 4, e di 4 a 8.

Ragione tripla di tre ragioni, s'intende quella fra quattro numeri in *proporzione continua*, come 2, 4, 8, *16*, dove la ragione di 2 a *16*, si dice tripla delle tre ragioni di 2 a 4, di 4 a 8, e di 8 a *16*.

Ragione composta, è quella, dove l'*antecedente* è uguale al *prodotto* degli antecedenti di più *ragioni Geometriche*, e i *conseguenti* uguali al prodotto dei conseguenti delle medesime ragioni. Così si conoscerà che la ragione composta delle ragioni di 2 a 3, di 4 a 5, e di *6* a 11, è uguale a quella di 48 a 165.

Ragione di due ragioni Geometriche, è la *ragione Geometrica* dei loro *denominatori*, ove si conosce, che la ragione di 2 a 3 sta alla ragione di 5 a *6*, come $\frac{2}{3}$ a $\frac{5}{6}$, ovvero come 4 a 5.

Ra-

Ragioni Aritmetiche uguali, *o ſimili*, ovvero *Aritmetiche ragioni uguali*, *o ſimili*, o pure *ſimili*, *o uguali ragioni Aritmetiche*, ovvero *uguali*, *o ſimili ragioni Aritmetiche*, ſono quelle, ove la differenza dei più piccioli termini è uguale alla differenza dei più grandi, come la ragione di 2 a 5 è uguale, o ſimile a quella di 6 a 9 perchè la differenza 3 delli più piccioli *termini* 2, e 5 è uguale alla differenza dei più grandi 6, e 9.

Ragioni Geometriche uguali, *o ſimili*, ovvero *Geometriche ragioni uguali*, *o ſimili*, o pure *ſimili*, *o eguali ragioni Geometriche*, o ancora *uguali*, *o ſimili ragioni Geometriche*, ſono qnelle, i di cui più piccioli *termini* ſono *ſimili parti aliquote*, o *aliquante* dei più grandi, come queſta di 3 a 6, è uguale, o ſimile a queſt' altra di 4 a 8 ec. 19. I.

Ragioni inuguali, ſono quelle, ove l' *antecedente* non ha in ciaſcheduno lo ſteſſo rapporto al ſuo *conſeguente*; queſto però s'intende nelle ſole *ragioni Geometriche*.

Ragioni Geometriche proporzionali, ſono quelle, che hanno i loro *denominatori Geometricamente proporzionali*, come ſono le ragioni di 2 a 3, di 4 a 7, e di 24 a 49 ec.

RABDOLOGIA, è il modo di contare colle colonne, o verghette della *Tavola Pitagorica*. 49. 72. I.

Rotto, *Numero rotto*, *o frazione*, è quello che rappreſenta la parte di un' unità, come $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$ ec. 93. I.

Rotto improprio, ovvero *numero rotto improprio*, è quello che è maggiore dell' unità, come, $\frac{8}{5}$, $\frac{7}{5}$ ec. 96 $\frac{1}{2}$. I.

Rotto di rotto, ovvero *frazione di frazione*, o *frazioni ſeconde*, è una parte di una frazione. 107. I.

Rotto di rotto di un rotto, ovvero *frazioni di frazioni di una frazione*, *oppure frazioni terze*, *o rotti terzi*, s'intende per una parte *di rotto di rotto*, e così s'intende per le *frazioni*, *o rotti quarti*, cioè una parte *dei rotti*, *o frazioni terze*, e così di ſeguito. 108. I.

Rotti, *o frazioni della medeſima denominazione*, ovvero *della medeſima ſpecie*, ſono quelli, che hanno i ſuoi *denominatori* uguali, come $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{6}{7}$ ec. 103. I.

Rotti, *o frazioni di diverſe denominazioni*, ovvero *di diverſa ſpecie*, ſono quelli che hanno i loro *denominatori* inuguali, come $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$ ec. 104. I.

Rotti, *o frazioni prime*, ſono quelle, che hanno i loro *numeratori*, e *denominatori*, che ſono *numeri primi*, come $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{12}$ ec.

Rotti, *o frazioni ſimili*, *o equivalenti* ſono quelli, i di cui *numeratori* ſono *ſimili parti aliquote* dei loro *denominatori*, come $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{6}{9}$ ec.

Rotti, *o frazioni decimali*, ſono quelle che hanno il *denominatore*, che è l'unità accompagnata con dei *zeri*, come $\frac{2}{10}$, $\frac{6}{100}$, $\frac{15}{10000}$ ec. 96. II.

Rot-

Rotti, o frazioni decimali prime, seconde, terze ec. s'intendono nel seguente modo, se nel *denominatore* v'è un sol *zero*, questa è *frazione decimale prima*, come $\frac{4}{10}$, se due, come $\frac{7}{100}$ è *frazione decimale seconda*, se tre, *terza*, e così deesi intendere delle altre. 110. I.

RADICE QUADRATA, vuol dire quel *numero*, che si è moltiplicato in se stesso per averne un *numero quadrato*. 29. I.

RADICE CUBA, ovvero *Cuba Radice*, è quel *numero*, che si moltiplica tre volte in se stesso, per averne il *numero* Cubo. 31. I.

Radice quadrato-quadrata, è quel *numero* provenuto dalla *moltiplicazione* di un *numero cubo*, come 2 è la radice quadrato--quadrata di 16, che è un numero provenuto dalle moltiplicazioni del numero cubo 8, per la sua radice cuba 2.

Radice di qualsivoglia potenza, o dimensione, è quel *numero*, che fu *moltiplicato* tante volte in se, che produce la data *potenza*.

Radice sorda, o irrazionale di qualsivoglia *numero*, è quella che non si può esprimere per nessun numero, come la *radice quadrata di* 18, la *Cuba* di 9 ec., e così delle altre. 115. I.

Radice incommensurabile, è lo stesso che *radice sorda, o irrazionale*. 115. I.

Radice razionale, o commensurabile, è quella, che si può esprimere precisamente; come la *radice quadrata* di 4, che è precisamente 2, la *radice Cuba* di 27, che è precisamente 3, e così delle altre.

Radice quadrata eccedente, è quella *radice quadrata irrazionale*, che è più del vero. 116. I.

Radice quadrata scarsa, è quella *radice quadrata irrazionale*, che è minore del vero. 116. I.

REGOLA DEL TRE, REGOLA DI PROPORZIONE, o *REGOLA AUREA*, è quella, che insegna la maniera di trovare a tre numeri dati un quarto *numero Geometricamente proporzionale*. 1. II.

Regola del tre dritta, è quella, dove il *primo termine* ha la medesima ragione a uno degli altri due, che deve avere il terzo al quarto, che si cerca. 2. II.

Regola del tre rovescia, è quella, il di cui *terzo termine* ha la medesima ragione a uno degli altri due, come la deve avere l'altro, cioè l'ultimo al quarto, che si cerca. 13. II.

Regola del tre in decimali, vuol dire, che i *termini* sieno *numeri decimali*. 8. II.

REGOLA COMPOSTA, O MOLTIPLICE, è quella, che insegna la maniera di trovare a molti *termini* dati un altro *proporzionale*. 14. II.

Regola del cinque, è quella *regola composta*, che ha cinque *termini*, la quale insegna il modo di trovare il sesto proporzionale. 14. II.

Regola del sette, è una *regola composta*, che ha sette *termini*, e insegna di trovare l'ottavo *proporzionale*. 14. II.

Regola del nove è una *regola composta*, che ha nove *termini*, e in-

insegna di trovare il decimo *proporzionale*. 14. II.

Regola Congionta, è una *regola composta*, colla quale si congiunge, e riduce in una sola più *regole del tre*. 14. 15. II.

Regole composte, o moltiplici rovescie del 5, 7, 9 ec., e congionte sono quelle, nelle quali operando all'uso delle dritte danno un *numero* minore di quello che deve essere. 16. 17. II.

REGOLA DELLE COMPAGNIE, o *SOCIETA'*, è quella, per la quale si divide un *numero* dato *poporzionalmente* a più altri. 18. II.

Regola delle Compagnie semplice, è quella per la quale si *divide* semplicemente un numero dato *proporzionalmente* a più altri dati, senza mutarli. 18. II.

Regola delle Compagnie composte, è quella, per la quale si *divide* un numero dato *proporzionalmente* a più altri, con delle condizioni, che mutano questi numeri. 19. II.

REGOLA TESTAMENTARIA, è lo stesso, che *la regola delle Compagnie*, solo che serve *a dividere* un numero dato *proporzionalmente* a più altri nelle distribuzioni fatte per testamenti. 20 II.

REGOLA DELLE ALLIGAZIONI, ovvero *Alligazioni*, *o equivalenze*, è quella, che insegna a alligare, o meschiare insieme più cose di diverso valore, e di trovare quanto ne bisogna prendere di ciascuna, secondo il numero della dimanda. 22. II.

Regola delle Alligazioni in egualità, ovvero *Alligazione in egualità*, è allora quando le cose da alligarsi sono uguali di numero. 24. II.

Regola delle Alligazioni in inegualità, ovvero *Alligazione in inegualità*, è allora che le cose da alligarsi, sono inuguali di numero. 25. II.

REGOLA DELLE FALSE POSIZIONI, detta del *Cataino*, è una regola, che insegna di sciorre alcune dimande con de' falsi supposti. 26. II.

Regola delle false posizioni semplice, è quella, che insegna a risolvere una dimanda con una sola posizione, o supposto falso. 27. II.

Regola delle false posizioni doppia, è quella, che insegna di sciorre una dimanda con due posizioni, o supposti falsi. 28. II.

Regola dei Baratti, insegna il modo di barattare le merci con altre, il di cui prezzo sia stato alterato. 29. II.

Regola degli Affitti, è quella, che insegna a sciorre le dimande attinenti agli Affitti di Case, Possessioni ec. 41. II.

Regola della estimazione della forza della quantità, *del numero ec. insegna* il modo di trovare quanto operano alcuni lavoranti rispettivamente alla loro quantità di operazione, di tempo ec., ed altre simili. 43. II.

Regola del cento, è quella *regola del tre*, il di cui primo *termine* è sempre 100.

Re-

Regola d'intereſſe, *o di frutti*, è una *regola del tre*, che inſegna a trovare il guadagno d'una quantità di denari, poſta a *cenſo* a un tanto per cento, per lira, o altramente in un determinato tempo. . 30. II.

Ridurre a minori termini, *o denominazione*, ovvero *abbaſſare*, *o ſchiſare una frazione*, vuol dire trovarne un'altra uguale alla data, ma compoſta di numeri minori. 99. I.

Ridurre qualſivoglia quantità nelle ſue minime ſpecie, vuol dire ſe ſono verbigrazia lire ridurle in ſoldi, o in denari. Se ſono pertiche, in piedi, oncie, o punti ec. 69. I.

Ridurre gl'intieri, *o intieri*, *e rotti in rotto*, vuol dire, ridurre i dati numeri in *numeri rotti*. 96. I.

Ridurre rotti in intieri, vuol dire, ridurre un *rotto improprio* in intieri. 98. I.

Ridurre le quantità allo ſteſſo rotto, vuol dire, ridurre due quantità in *rotto di una medeſima denominazione*. 97. I.

Ridurre un rotto, *o un intiero*, *e rotto a rotto di una data denominazione*, vuol dire, ridurre i dati numeri in rotti, che abbiano tutti il dato denominatore. 105. I.

Ridurre i rotti di rotti, *o frazioni ſeconde*, *terze* ec., *a rotti comuni*, vuol dire, trovare che parte il dato *rotto* è della ſua unità. 109. I.

Ridurre i Termini di una regola del tre a minor denominazione, vuol dire, ridurli in numeri minori, e che ſerbino la prima proporzione fra di loro. 5. II.

S

SOMMA, *o ſommare più numeri inſieme*, vuol dire, trovare un *numero*, che equivaglia ai numeri che ſi ſommano. 34. I.

Somma delle ragioni, vuol dire come ſiegue, ſieno queſte ragioni 2 a 3, 4 a 5, 6 a 11, ſarà 48 a 165, la ſomma di eſſe, che è lo ſteſſo che la loro ragione compoſta, cioè la *moltiplicazione* degli *antecedenti*, che fa 48 e quella dei *conſeguenti*, che fa 165.

Somma ſemplice, è il modo di porre inſieme più coſe di una ſola ſpecie.

Somma compoſta, *o di diverſe ſpecie*, è il modo di porre inſieme più coſe di differenti ſpecie.

SOTTRARRE un numero da un altro, vuol dire levare da un *numero* un altro più picciolo, cioè trovare la loro differenza. 37. 38. 39. I.

Sottrarre più numeri da un altro, *o da più altri numeri*, vuol dire levare la *ſomma* degli uni dalla ſomma maggiore degli altri; cioè trovare un altro numero, che ſia l'ecceſſo delle ſuddette due ſomme.

Sottrarre ſemplice, è la maniera di levare un *numero*, o più numeri da un altro, o più numeri della medeſima ſpecie. Vedaſi il Queſito. 3. I.

Sottrarre composto, *o Sottracione composta*, *o di diverse specie*, è il modo di levare un *numero*, o più numeri di diversa specie, da un altro, o più numeri di diversa specie.

Sciorre la regola del tre, *mediante i Logaritmi*, vuol dire adoperare i *Logaritmi* nella soluzione della regola del tre. 6. II.

Sciorre la regola del tre aumentando, *o diminuendo i termini*, vuol dire far divenir più grandi, o più piccioli i numeri, che formano i *termini* della regola, e in tal modo risolverla. 7. II.

Simili parti aliquote, ovvero *parti aliquote simili*, sono quelle, che sono ugualmente contenute dai loro *multipli*; onde si conosce, che questi due numeri 3 e 5, sono *simili* parti aliquote di questi due 18, e 30, perchè 3, è contenuto *6* volte nel suo multiplo 18, come parimenti 5 è contenuto *6* volte nel suo multiplo 30.

Simili parti aliquante, ovvero *parti aliquante simili*, sono dei numeri, che contengono ugualmente delle *simili parti aliquote* del loro *Tutto*: così si conosce, che questi due numeri *9*, 18, sono simili parti aliquante di questi due 12, 24, perchè *9* contiene tre volte il quarto di 12, che è 3, e parimente 18 contiene tre volte il quarto di 24, che è *6*.

Simili, *o uguali ragioni Geometriche*, ovvero *ragioni Geometriche uguali*, *o simili*, oppure *Geometriche ragioni uguali*, *o simili*, sono quelle dove i più piccioli *termini* sono *simili parti aliquote*, *o aliquante* dei più grandi, come questa di 3 a *6* è uguale, o simile a quest' altra di 4 a 8.

Simili, *o uguali ragioni Aritmetiche*, ovvero *Ragioni Aritmetiche uguali*, *o simili* ec. sono quelle, ove la differenza dei più piccioli *termini*, è uguale alla differenza dei più grandi, come la ragione di 2 a 5, è uguale, o simile a quella di *6* a *9*, perchè la differenza 3 dei più piccioli termini 2, e 5 è uguale alla differenza dei più grandi *6*, e *9*.

Secondo termine di qualsivoglia *medietà* fuori delle tre medietà, cioè *Aritmetica*, *Geometrica*, *e Armonica*, è quello, che è il mezzano fra gli altri due.

Secondo termine d' una medietà moderna, è l' eccesso del secondo sopra il terzo.

Scontare a scaletta, *o censo a scaletta*, è il pagare un tanto l' anno per un *Censo* tra il pagamento de frutti, e l' estinzione del *Capitale*. 32. II.

Scontare semplice, vuol dire diminuire il *Capitale* un tanto per cento. 33. II.

Scontare a capo d' anno, è un' operazione contraria ai *censi a Capo d' anno*. 36. II.

Schifare, *Abbassare*, *o ridurre a minori termini*, *o denominazione* una frazione, vuol dire, trovare un' altra frazione composta di numeri minori, e che sia uguale alla data. 99. I.

Schi-

Schifatore, chiamafi quel *numero* che *divide* il *numeratore*, e il *denominatore* di un *rotto* per *abbaffarlo*, o *ridurlo a minori numeri*. 100. I.

Soccide, o Compagnie rufticali, è la *regola delle Compagnie* applicata alla Gente di Villa, come per Pecore, od altri Animali dati a qualche Paftore, con certi patti. 21. II.

Saldare le ragioni fra i Mercanti, ovvero *Conpenfazione dei pagamenti fra i Mercanti*, è il modo di faldare i debiti, riguardo al tempo che compenfa il pagamento. 39. II.

Submultiple, o fumultiplice di un numero, è un altro numero più picciolo, che fi trova comprefo un certo numero di volte efattamente nel più grande; dove fi conofce, che il 3 è fubmultiplo del numero 12, perchè trovafi nel 12 quattro volte precifamente. 13. 14. I.

Superparticolare ragione, o ragione fuperparticolare, è quella, ove l'*antecedente* contiene una volta il *confeguente*, e di più una *parte aliquota* del medefimo confeguente. 61. II.

Sefquialtera ragione, o *ragione fefquialtera*, è una *ragione fuperparticolare*, dove l'*antecedente* contiene il *confeguente* una volta, e mezza, come la ragione di 3 a 2.

Sefquiterza ragione, o ragione fefquiterza, è quella, dove l'*antecedente* contiene il *confeguente* una volta e un terzo, come la ragione di 8 a 6.

Sefquiquarta ragione, ovvero *ragione fefquiquarta*, è quella, dove l'*antecedente* contiene il *confeguente* una volta, e un quarto, come la ragione di 15 a 12, e così delle altre, cioè *fefquifquinta*, *fefquifefta ec.*

Surparciente ragione, ovvero *ragione furparciente*, è quella, ove l'*antecedente* contiene una volta il *confeguente*, e di più una *parte aliquanta* del medefimo confeguente.

Surbiparziente terza, o *ragione furbiparziente terza*, è quando l'*antecedente* contiene il fuo *confeguente* una volta, e due terzi, come quella di 20 a 12 ec. fe lo contiene una volta, e tre quarti, chiamafi *furbiparziente quarta*, come 21 a 12, fe una volta, e quattro quinti *furbiparciente quinta*, come 9 a 5, e così delle altre.

Sefta medietà, ovvero *Medietà fefta* è quella, ove il terzo *termine* fta al primo, come l'eceffo del primo fopra il fecondo, all'eceffo del fecondo fopra il terzo, come 6, 4, 1.

Settima medietà moderna, ovvero *Medietà fettima moderna*, è quella, ove il terzo eceffo fta al primo, come il fecondo al terzo, come 7, 6, 1, ovvero il primo *termine* è fempre uguale alla *fomma* degli altri due.

Trian-

T

TRiangolo rettangolo in numeri, sono tre *numeri razionali i quadrati* dei due più piccioli, dei quali sono uguali al quadrato del più grande, onde questi tre numeri 3, 4, 5 rappresentano un triangolo rettangolo in numeri, perchè i due quadrati 9, e 16 dei due numeri 3, e 4 più piccioli sono uguali al 25, quadrato del numero più grande 5, e così di molti altri.

TRIANGOLO ARITMETICO, è una Tavola Triangolare, o un triangolo composto di più Caselle ripiene di numeri, il quale è di molto uso nelle *combinazioni*, e nell' Algebra per formare le *potenze ec.* come si può vedere nel Trattato del Triangolo Aritmetico di *Monsieur Pascal*; e questo è lo stesso che la Tavola posta nell' antecedente Parte, cioè al Capitolo III. dell' Opuscolo delle Combinazioni, e Permutazioni del Sig. Niccolò di Martino, intesa però disposta in Triangolo, nel modo che si vede quì sotto

Triangolo Aritmetico.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
I	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
II	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
III	1	3	6	10	15	21	28	36		
IV	1	4	10	20	35	56	84			
V	1	5	15	35	70	126				
VI	1	6	21	56	126					
VII	1	7	28	84						
VIII	1	8	36							
IX	1	9								
X	1									

Triangoli rettangoli in numeri della medesima specie, sono quelli che hanno i *lati proporzionali*, come sono i seguenti 3, 4, 5, 6, 8, 10 ec.

Trian-

Triangoli rettangoli in numeri di diversa specie, sono quelli, li di cui *lati* non sono *proporzionali*, come 9, 12, 15, 7, 24, 25.

Termini di una ragione, sono i due *numeri* che la formano, cioè *l'antecedente*, *e il conseguente*.

Termini omologhi, sono nelle ragioni gli *antecedenti* agli *antecedenti*, e i *conseguenti* ai *conseguenti*, dal che si vede, che nelle ragioni di 2 a 3, di 4 a 6, di 10 a 15 ec. i termini omologhi sono gli antecedenti 2, 4, 10, come pure lo sono i conseguenti 3, 6, 15. 4. II.

Termini di una Progressione, sono quella serie di *numeri* che la compongono. 45. II.

Termini della regola del tre, sono i tre *numeri* che la formano. 3. II.

Termine minimo delle Progressioni, è il termine minore degli altri. 52. II.

Termine massimo delle progressioni, è il maggiore degli altri 53. II.

Terzo termine di qualsivoglia medietà, fuori delle tre medietà, cioè *Aritmetica*, *Geometrica*, *e Armonica*, è quello, che è più picciolo degli altri due.

Terzo termine d'una medietà moderna, è l'eccesso del *primo* sopra il *terzo*.

Tavola dei quadrati, *e dei cubi*, è una Tavola, dove sono notati i *quadrati*, *e i cubi* di molti *numeri*, principiando dall'*unità*, e proseguendo ad arbitrio, e serve per l'estrazione delle *radici quadrate*, *e cube*. 132. I.

Tavola Pittagorica, *o Libretto*, è una Tavola dove trovansi le *moltiplicazioni* dei numeri, fino al 9 inclusive. 45. I.

Tavola, *o Canone Logaritmico*, sono due serie di *numeri*, una in *Progressione Aritmetica*, e l'altra in *Progressione Geometrica*. 51. I.

Teorica Aritmetica, cioè *Aritmetica Teorica*, è quella, che considera le cagioni, le qualità, e le proprietà dei *numeri*. 2. I.

Tutto, è un *numero* qualunque per rapporto alle sue *parti aliquote*, ovvero *aliquante*: così 12 è un Tutto, a riguardo delle sue parti aliquote 2, 3 ec. ovvero delle sue aliquante 5, 7 ec.

Tariffa, è una Tavola, o Libretto, in cui trovansi le *moltiplicazioni* di molti *numeri*, per molti altri numeri, e questa serve per abbreviare le moltiplicazioni.

Trovare tutte le parti aliquote di un numero intiero, vuol dire trovare i numeri intieri, che aliquotamente possono dividere un daro numero. 102. I.

Tarra, è quel calo, che fa qualunque Mercanzia espurgata dalle sue parti eterogenee. 12 $\frac{1}{2}$. II.

Ugua-

U

UGuali, *o ſimili ragioni Geometriche*, ovvero *ſimili*, *o uguali ragioni Geometriche*, oppure *Ragioni Geometriche ſimili*, *o uguali*, o ancora *Geometriche Ragioni ſimili*, *o uguali*, ſono quelle, dove i più piccioli *termini* ſono *ſimili parti aliquote*, *o aliquante* dei più grandi, come queſta di 3 a 6, è uguale, o ſimile a queſt'altra di 4 a 8.

Uguali, *o ſimili ragioni Aritmetiche*, ovvero *ſimili*, *o uguali ragioni Aritmetiche*, oppure *Ragioni Aritmetiche ſimili*, *o uguali*, o ancora *Aritmetiche ragioni ſimili*, *o uguali*, ſono quelle, ove la differenza dei più piccioli *termini*, è uguale alla differenza dei più grandi, coma la ragione di 2 a 5, è uguale, o ſimile a quella di 6 a 9, perchè la differenza 3 dei più piccioli termini 2, e 5, è uguale alla differenza dei più grandi 6, e 9.

Unità, è tutto ciò che vien denominato uno, o una, l'aggregato delle quali forma il numero. 4. II.

Ultima figura di un numero compoſto di molte figure, è l'ultima che trovaſi a ſiniſtra. 8. I.

Uſura, è lo ſteſſo, che *Cenſo a capo d'anno*. 34. II.

Z

ZEro, *o nulla*, è un ſegno, che poſto a deſtra di qualſivoglia *figura* la fa divenire dieci volte di più di quello era. 9. I.

IL FINE DEL TERZO, ED ULTIMO TOMO.